

問題 等差数列 $\{a_n\} : 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, \dots$ と等比数列 $\{b_n\} : 3, -9, 27, -81, 243, \dots$ に共通な項からなる数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めなさい。

方針 2つの等差数列の共通な項からなる数列の一般項を求める問題もポピュラーだが、この問題のように等差数列と等比数列の共通な項からなる数列の一般項を求める問題もよく出題される。基本的なやり方は同じなので、是非、この問題を例題の1つとしてしっかり理解し、本番で出た際には自信を持って解けるようにしておきたい。

さて、実際に並んだ共通な項に3と27があるところを見ると、初項が3、公比が9の等比数列と予想され、次に243が来ると考えられる。問題は、それが数列 $\{a_n\}$ の項となるかどうかだが、 $a_n = 4n - 1$ より $4n - 1 = 243$ とおくと、 $n = 61$ となり、どうも予想は当たってそうである。正式な答えは次のようになる。

解答 数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通な項のうち、数列 $\{b_n\}$ に属する項を b_k とする。但し、それは数列 $\{a_n\}$ の項であるので $b_k = 4l - 1$ とおける。数列 $\{a_n\}$ の項は全て正の項だから、 $b_{k+1} = -3b_k < 0$ より、 b_{k+1} は数列 $\{a_n\}$ の項には成り得ない。ところが $b_{k+2} = (-3)^2 b_k = 9(4l - 1) = 36l - 9 = 4(9l - 2) - 1$ となり、 $4 \times \text{整数} - 1$ の形になっているから、 b_{k+2} もまた数列 $\{a_n\}$ の項と言える。つまり b_k が数列 $\{a_n\}$ の項なら、 b_{k+2} も数列 $\{a_n\}$ の項であると言えたことになる。ところで数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ に共通な項で最初のものは3だから、それに9を順にかけて出来る数字もまた2つの数列に共通な項となる。すなわち数列 $\{c_n\}$ の一般項は $c_n = 3 \times 9^{n-1} = 3^{2n-1}$ となる。