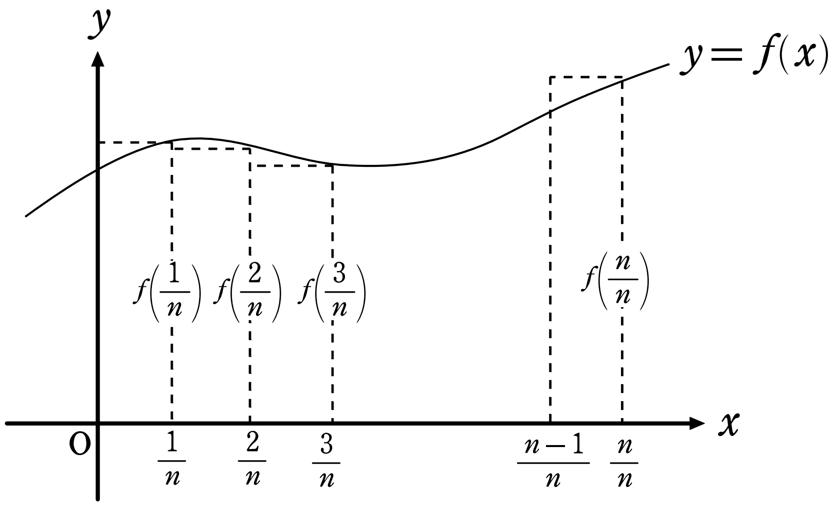
区分求積法と逆関数（応用編 ①）

今回は区分求積法と逆関数について学びます。

区分求積法については、他のプリントでも説明していますが、再度、確認してみましょう。



上の図で、底辺が $\frac{1}{n}$ で、高さが $f\left(\frac{k}{n}\right)\,(k=1\,,2\,,3\,,\cdots,n)$ の長方形を集めると、それらの面積を総和は

$\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$ つまり、 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$ となります。この式で、 $n\to\infty$ として極限を取ると、

図より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$ となると分かります。これが区分求積法の考え方です。

次に逆関数に関する復習をしましょう。一般に 関数 $f(x)$ に対し、その逆関数は $f^{-1}(x)$ と表されます。 $y=2x$ を例に逆関数の求め方を簡単に説明しましょう。まず、 $y=2x$ を x について解きます。勿論、 $x=\frac{1}{2}y$ となります。更に x と y を入れ替えます。 つまり $y=\frac{1}{2}x$ が $y=2x$ の逆関数となります。これを y を使わず $f(x)$ で説明すると、まず $f(x)=2x$ を x について解きます。すると、 $x=\frac{1}{2}f(x)$ となります。次に x を $f^{-1}(x)$、 $f(x)$ を x に変えます。

よって、求める逆関数は、 $f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x$ となります。

ところで、元の関数と逆関数はどういう関係にあるのでしょうか。簡単に言うと、数字の対応を逆にしたものと言えます。例えば、 $y=2x$ では $x\to y$ の対応は $1\to 2$ のようになりますが、逆関数 $y=\frac{1}{2}x$ では、$2\to 1$ のように数字の対応が逆になります。ですから、ある数字をある逆関数で変換し、更にその逆関数で変換すると元に戻ることになります。これを $f(x)$ や $f^{-1}(x)$ を使って表現すると、 $f^{-1}(f(x))=x$ 、あるいは $f(f^{-1}(x))=x$ と表せます。

具体的な例を使って説明してみましょう。$y=e^x$ の逆関数は $y=\log x$ （勿論、 $y=\log x$ の逆関数が $y=e^x$ とも言えます。）ですから、 $f(x)=e^x$ 、 $f^{-1}(x)=\log x$ と表すと、 $f^{-1}(f(x))=\log f(x)=\log e^x=x\log e=x$ となります。また、同様に $f(f^{-1}(x))=e^{\log x}=x$ なります。

$f(f^{-1}(x))=e^{\log x}=x$ については、少しピンとこないかも知れませんから、問題形式で説明してみましょう。

区分求積法と逆関数（応用編 ①）

問題　$a^{\log_a x}=x$　（但し、$a>0$ で $a\fallingdotseq 1$ ）となることを証明しなさい

解答　$a^{\log_a x}=p$ $(p>0)$ とおいて、両辺の底$=a$ とする対数を取ると、$\log_a a^{\log_a x}=\log_a p$　対数の性質を使うと $\log_a x\cdot\log_a a=\log_a p$　ところで $\log_a a=1$ だから、$\log_a x=\log_a p$　つまり $p=a$ となり、$a^{\log_a x}=x$ が成り立つと言えます。

　さあ、ここまで準備すると、次の問題を解くことが出来ます。

問題 n を自然数とする。次の問に答えなさい。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$ を求めよ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}$ を求めよ。　　（琉球大学）

(1) **解答** $\log\left(1+\dfrac{k}{3n}\right)=f\left(\dfrac{k}{n}\right)$ だから、$f(x)=\log\left(1+\dfrac{x}{3}\right)$ である。

よって $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx=\int_0^1 3\left(1+\frac{x}{3}\right)'\log\left(1+\frac{x}{3}\right)dx$

$$=\left[3\left(1+\frac{x}{3}\right)\log\left(1+\frac{x}{3}\right)\right]_0^1-\int_0^1 3\left(1+\frac{x}{3}\right)\frac{\left(1+\frac{x}{3}\right)'}{1+\frac{x}{3}}dx$$

$$=4\log\frac{4}{3}-\int_0^1 dx=4\log\frac{4}{3}-1$$

(2) **解答**

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{(3n+1)(3n+2)\cdots(4n)}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{3}{3n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)\times 3^n}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{3}{3n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}}$$

$$=3\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)}$$

$$=3\,e^{4\log\frac{4}{3}-1}=3\,e^{\log\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^4}{e}}=3\cdot\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^4}{e}=\frac{256}{27e}$$

【（2）の解答の更なる説明】

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{3}{3n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$　の計算に区分求積法を利用するには、ルートの中の積が和の形でなければまりません。ですから、まず対数をとります。すると、次のようになります。

区分求積法と逆関数（応用編 ①）

$$\log\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{3n}\right)\left(1+\frac{2}{3n}\right)\left(1+\frac{3}{3n}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{n}{3n}\right)}$$

$$=\frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{3n}\right)+\log\left(1+\frac{3}{3n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{n}{3n}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)$$

この極限を取ると

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{3n}\right)=\int_0^1\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx$$

$$=3\int_0^1\left(1+\frac{1}{3}x\right)'\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)dx=3\left[\left(1+\frac{1}{3}x\right)\log\left(1+\frac{1}{3}x\right)\right]_0^1-3\int_0^1\left(1+\frac{1}{3}x\right)\frac{1}{1+\frac{1}{3}x}\cdot\frac{1}{3}dx$$

$$=3\times\left(\frac{4}{3}\log\frac{4}{3}-0\right)-\Big[x\Big]_0^1=4\log\frac{4}{3}-1=\log\frac{256}{81}-\log e=\log\frac{256}{81e}$$

これを e の指数部分として計算して３倍したら求める極限になります。ここで大切なのは、 $a=e^{\log a}$ という対数と指数の間に成り立つ関係式ですね。底が同じだったら、対数関数と指数関数は逆関数だから、こういう関係式が成り立ちます。