入試演習　(ベクトル①)　　問題編

【1】[2018 神戸大]

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。OABC を1辺の長さが1の正四面体とする。辺 OA を $1-t:t$ に内分する点を P，辺 OB を $t:1-t$ に内分する点を Q，辺 BC の中点を R とする。また $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{QR}}$ を t，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，t の値を求めよ。

(3)　t が(2)で求めた値をとるとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を求めよ。

【2】[2018 名古屋工業大]

座標空間内の4点 $\mathrm{A}(-3,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(6,\ 7,\ -2)$，$\mathrm{C}(6,\ -4,\ 11)$，$\mathrm{D}(1,\ 11,\ -9)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB と直線 CD は1点 P で交わることを示し，P の座標を求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{APC}$ と $\triangle\mathrm{APD}$ の面積の比を求めよ。

【3】[2019 兵庫県立大]

$\triangle\mathrm{ABC}$ と点 P があり，$2\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+4\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ を満たしている。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{PBC}$，$\triangle\mathrm{PCA}$ の面積の比を求めよ。

(3)　直線 AP 上に点 Q をとり，$\triangle\mathrm{QAB}$ と $\triangle\mathrm{QBC}$ の面積比が $3:1$ になるようにする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}$ が満たす関係式を求めよ。

【4】[2019 静岡大]

平面上に $\triangle\mathrm{ABC}$ がある。実数 x，y に対して，点 P が $3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+4\overrightarrow{\mathrm{PB}}+5\overrightarrow{\mathrm{PC}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ を満たすものとする。

(1)　$x=y=0$ のとき，$\triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{PBC}$，$\triangle\mathrm{PCA}$ の面積比を求めよ。

(2)　点 P が $\triangle\mathrm{ABC}$ の周および内部にあるとき，点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　(2)を満たす点 $(x,\ y)$ のうち，$\triangle\mathrm{PAB}$，$\triangle\mathrm{PBC}$，$\triangle\mathrm{PCA}$ の面積比が $1:2:3$ となる点 $(x,\ y)$ を求めよ。

(4)　線分 BC を $2:1$ に外分する点を D とする。点 P が線分 CD 上(両端を含む)にあるとき，点 $(x,\ y)$ が存在する範囲を xy 平面上に図示せよ。

【5】[2019 三重大]

空間内の3点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(-1,\ 3,\ 2)$ を通る平面を α とし，原点 O から α に下ろした垂線と α との交点を H とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積 S を求めよ。　　(2)　点 H の座標を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積 V を求めよ。

入試演習　(ベクトル①)　問題編

【6】[2019 津田塾大]

空間中に3点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある。点 $\mathrm{P}(p,\ q,\ r)$ が $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たしながら動く。

(1)　q，r をそれぞれ p を用いて表せ。

(2)　点Pが平面ABC上にあるときの p の値を求めよ。

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ とおく。点Pを中心とし半径がPAに等しい球面 S と，xy 平面との交わりは円になる。この円の半径を求めよ。

【7】[2019 北海道大]

p を負の実数とする。座標空間に原点Oと3点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ -2,\ 1)$，$\mathrm{P}(p,\ -1,\ 2)$ があり，3点O，A，Bが定める平面を α とする。また，点Pから平面 α に垂線を下ろし，α との交点をQとする。

(1)　点Qの座標を p を用いて表せ。

(2)　点Qが△OABの周または内部にあるような p の範囲を求めよ。

【8】[2018 同志社大]

Oを原点とする座標空間内に2点 $\mathrm{A}(-1,\ 2,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ 0,\ 1)$ と xy 平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ 0)$ を考える。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を求めよ。

(2)　条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$ を満たす点Pは xy 平面上のどのような図形上にあるか。この図形の方程式を x，y で表せ。

(3)　条件 $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす点Pは xy 平面上のどのような図形上にあるか。この図形の方程式を x，y で表せ。

(4)　2つの条件 $|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ をともに満たす点Pの座標で y 座標が正であるものを求めよ。

(5)　t を実数として点 $\mathrm{C}(t,\ 0,\ 1)$ を考える。t をある値に定めたとき，条件 $\angle\mathrm{APC}=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす点Pが xy 平面上でただ1つ定まる。このときの t の値と点Pの座標を求めよ。

【9】[2018 早稲田大]

点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ を通り，ベクトル $(1,\ 1,\ -2)$ に平行な直線を ℓ_1 とし，点 $\mathrm{B}(2,\ 0,\ 1)$ を通り，ベクトル $(1,\ 2,\ -3)$ に平行な直線を ℓ_2 とする。また，2直線 ℓ_1，ℓ_2 の両方に垂直に交わる直線を ℓ_3 とする。直線 ℓ_1 と直線 ℓ_3 との交点を点C，直線 ℓ_2 と直線 ℓ_3 との交点を点Dとする。

(1)　点Cと点Dの座標は，それぞれ $\mathrm{C}\left(^{ア}\boxed{},\ ^{イ}\boxed{},\ ^{ウ}\boxed{}\right)$，$\mathrm{D}\left(^{エ}\boxed{},\ ^{オ}\boxed{},\ ^{カ}\boxed{}\right)$ である。

(2)　四面体ABCDの体積は $^{キ}\boxed{}$ である。

入試演習　(ベクトル①)　　問題編

【10】[2018 立命館大]

座標空間に球面 $S: x^2+y^2+z^2+4x-6y-8z+16=0$ と点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ がある。点Aを通り，$\vec{n}=(1,\ 2,\ -2)$ に垂直な平面を α とする。平面 α 上に点 $\mathrm{B}(5,\ t,\ 2)$ があるとき，次の問いに答えよ。

(1)　球面 S の中心Cの座標と半径を求めよ。

(2)　定数 t の値を求めよ。

(3)　球面 S が平面 α と交わってできる円 K の半径を求めよ。

(4)　円 K の周上を点Pが動くとき，$\triangle\mathrm{ABP}$ の面積の最大値を求めよ。なお，2 点A，Bは円 K の外部にある。

【11】[2017 京都大]

座標空間において原点Oと点 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を ℓ とし，点 $\mathrm{B}(0,\ 2,\ 1)$ と点 $\mathrm{C}(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。ℓ 上の2点P，Qと，m 上の点Rを $\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形となるようにとる。このとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最小となるようなP，Q，Rの座標を求めよ。