複素数平面の基礎①　　by Aokijuku

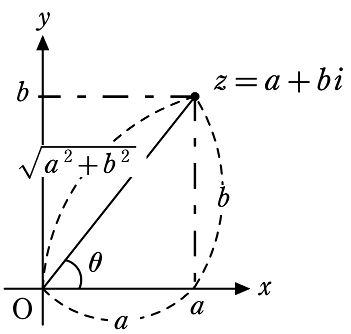
一般に、複素数平面（別名：ガウス平面）について、表層的な理解に留まったままで、本質をしっかり把握している高校生は余り多くはないようです。これからその核心とも言える複素数平面の基礎について、皆さんにしっかり理解してもらおうと思います。

そもそも複素数平面とは何なのか。それにはまず複素数の性質を知らねばなりません。複素数というのは、勿論、実数と虚数を合わせたもので、皆さんも良くご存じのように、虚数単位と呼ばれる i は、$i^2=-1$ で定義される想像上の数（imaginary number : 英語の「虚数」）の数を表します。（i は、imaginaryの頭文字をとったものですね。）

$$\text{複素数}\begin{cases}\text{実数}\\\text{虚数}\end{cases}$$

ところで、i は想像上の数で実体がありませんから、大小という概念がそもそも存在しまません。たとえば、$2+3i$ と書いたって、それが $3i$ より 2 だけ大きいとか、2 より $3i$ だけ大きいということは言えないのです。 では、$2+3i$ は何を表しているのか。実は単なる２つの数の組合せに過ぎないのです。そのような数字の組のことを数学の世界では「直積」と呼び、座標の $(2,3)$ なども「直積」の仲間と言えます。そこから、$2+3i$ をあたかも座標の $(2,3)$ のように扱おうという考え方が生まれた訳です。

今、$z=a+bi$ (a,b は実数) という複素数を考えてみましょう。これまで使い慣れた座標平面の横軸を「実軸」とし、z の実部 a の位置を示す数直線とします。また、縦軸を「虚軸」と呼び、z の虚部 b の位置を示す数直線とします。図で表すと下のようになりますね。（※ここで大切なのは、虚軸に i は表記されないことです。）



ところで、図を見ると、原点Oと 点 z との距離は三平方の定理より $\sqrt{a^2+b^2}$ であることが分かります。これを z の絶対値と呼び $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ と表します。また、図の 角 θ のことを z の偏角（argument）といいます。argumentというと、英語の授業では「議論」という訳語を当てるのが普通ですが、数学でargumentと言えば「偏角」を意味し、ある複素数の偏角だけを取り上げたいときは、$arg(z)=\theta$ のように表します。

更に、左の図をよく見て下さい。$a+bi$ をその絶対値の $\sqrt{a^2+b^2}$ でくくるとどうなるでしょうか。

$$z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i\right)\text{となりますが、}$$

三角比の定義より、$\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\theta$，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\theta$ となりますから

$z=a+bi=\sqrt{a^2+b^2}(\cos\theta+i\sin\theta)$ と表すことが出来ます。この形を複素数の極形式と言います。実は、この極形式と三角関数の持つ性質を合わせると、どんでもない世界が、突然、目の前に広がります。

では、その凄さを味わっていただきましょう。

今、$\cos\theta_1+i\sin\theta_1$ と $\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ を掛け合わせて見ましょう。すると

$$\begin{aligned}(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)&=(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\cos\theta_1\sin\theta_2)\\&=\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\end{aligned}$$
（※加法定理を覚えていますか。）

今度は、$\cos\theta_1+i\sin\theta_1$ を $\cos\theta_2+i\sin\theta_2$ で割ってみることにしましょう。

$\dfrac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2}$ この分母分子に分母の共役複素数 $\cos\theta_2 - i\sin\theta_2$ を掛けてみましょう。

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \frac{(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{(\cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2)}{\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)$$ （※同じく加法定理ですね。）

この性質を２つの複素数 $\alpha = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 、$\beta = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ (但し、$r_1 > 0$, $r_2 > 0$) に適用してみましょう。

$\alpha\beta = r_1 r_2\{\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)\}$ 、$\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{r_1}{r_2}\{\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)\}$ となりますから、

$|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$, $\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right| = \dfrac{|\alpha|}{|\beta|}$ や $|\alpha^n| = |\alpha|^n$, 更には $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$ 等の式が成り立つことが分かります。

ここまでやると、複素数平面において２つの複素数の積や商が何を表すかが分かってきます。つまり２つの複素数を掛け合わせると、２つの複素数の積の絶対値はそれぞれの複素数の絶対値の積となり、偏角は２つの複素数の偏角の和となり、また、２つの複素数の一方を他方で割ると、その絶対値はそれぞれの複素数の絶対値の商となり、偏角は２つの複素数の偏角の差となるということです。なかなか興味深い性質ですね。実は複素数の持つこの性質が、あとあと図形への応用へとつながっていくのです。ガウスって、本当に偉大な数学者だと思います。

【ヨハン・カール・フリードリッヒ・ガウス】

18世紀後半から19世紀の半ばまで活躍した数学者。1777年、ドイツのブラウンシュバイクでレンガ職人の息子として生まれ、子供の頃から神童の誉れ高く、小学校時代の校長先生にその天才ぶりを見いだされ、様々な人々の協力で英才教育を受け、同じく彼の才能を認める人物の経済的支援を得てゲッティンゲン大学に学ぶ。90歳近くまで、その数学的能力は衰えることなく、多くの分野で優れた研究業績を残している。小学校の低学年の時に、等差数列の公式を自ら生み出したエピソードが有名である。