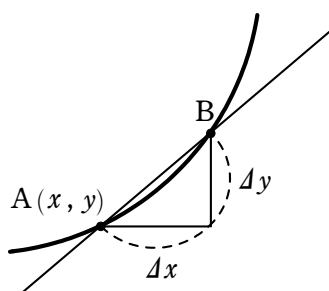


微分による二次曲線の接線の求め方

楕円など陰関数の接線を数Ⅱの微分で求めることは出来ません。今回は、そんな二次曲線の接線の求め方について学びましょう。

例題 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式を求めなさい。

解答 陰関数の微分をするには、合成微分のことが分かっている必要があります。まずは、それについて簡単に復習しましょう。



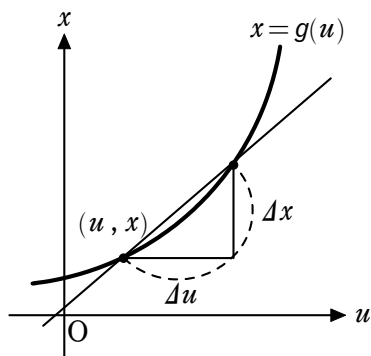
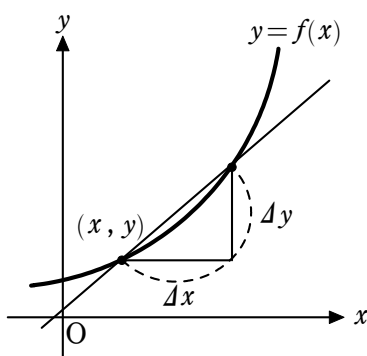
左図において、点Aにおける接線の傾きはどのように表されるでしょうか。点A (x, y) において x や y が微少量だけ増えるとき、その増加量をそれぞれ $\Delta x, \Delta y$ と表しますが、それを使うと左図における直線ABの傾きは $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ となります。

点Aにおける接線の傾きは、 Δx が限りなく0に近づくときの $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ の値であると

言えますから、 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ と表すことが出来ます。これが点A (x, y) における接線

の傾きで、しばしば $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ と表記されます。

今、 $y = f(x)$ という関数において、 x が更に変数 u の関数だとしましょう。つまり $y = f(g(u))$ の関係が成り立つとします。この時、分数の計算式 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ において、下の2つのグラフを参照すると、 $\Delta x \rightarrow 0$ のとき $\Delta u \rightarrow 0$



が成り立つことが分かります。よって

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \lim_{\Delta u \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \quad \text{つまり}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{が成り立つと言えます。}$$

これを使うと、陰関数の微分を行うことが出来ます。

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ の両辺を x で微分しましょう。 $\frac{x^2}{a^2}$ は、すぐ $\frac{2x}{a^2}$ となることが分かりますが、 $\frac{y^2}{b^2}$ を x で微分すると

どうなるのでしょうか。つまり $\frac{d}{dx} y^2$ の部分を計算したいわけです。(※ x の関数 $f(x)$ を x で微分したいとき、

$\frac{d}{dx} f(x)$ のように、 $f(x)$ は記号の右横に書くことになっています。ですから、 y^2 を x で微分したいとき $\frac{d}{dx} y^2$ と書きます。)

さて、この場合 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ において、左辺の y が y^2 、右辺の u が y になるので、

$$\frac{d}{dx} y^2 = \frac{d}{dy} y^2 \cdot \frac{dy}{dx} = 2y \cdot \frac{dy}{dx} \quad \text{となります。改めて } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ の両辺を } x \text{ で微分すると、} \frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \cdot \frac{dy}{dx} = 0 \text{ とな}$$

り、これを $\frac{dy}{dx}$ について解くと $\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$ となります。さて、この式の x と y に x_1 と y_1 を代入すると接線の傾

微分による二次曲線の接線の求め方

きの値は $-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$ となり、接線の方程式は $y - y_1 = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x - x_1)$ となります。この両辺に a^2y_1 を掛けて整理

すると $a^2y_1y - a^2y_1^2 = -b^2x_1x + b^2x_1^2 \rightarrow b^2x_1x + a^2y_1y = b^2x_1^2 + a^2y_1^2$ 両辺を a^2b^2 で割って

$\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}$ つまり $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$ となります。(※ (x_1, y_1) は楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点だから

$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$ となることに注意。) どうですか。分かりましたか。

【重要】 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1x}{a^2} + \frac{y_1y}{b^2} = 1$

〔補足〕 この接線の求め方を利用すると、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は

$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1$ 、放物線 $y^2 = 4px$ 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $y_1y = 2p(x + x_1)$ となることが分かります。

一度、自分で求めてみて下さい。