

【1】学校で不穏な噂が流れました。その噂とは「B君がC君を殴った。または、C君がB君を殴った。」というものです。当時、B君と一緒にいたA君が生徒指導室に呼ばれ、それが事実ではないと噂を否定する説明を先生にしました。さて、A君は先生にどのように説明したのでしょうか。「 」で述べたように言いなさい。

【解答】「B君はC君を殴らなかった。かつ、C君はB君を殴らなかった。」となります。「かつ」や「または」でつながれた内容を否定すると、その前後が否定されると共に、「かつ」は「または」に、「または」は「かつ」に変わることに注意しましょう。

【2】 x, y は実数、 n は自然数とします。次の条件の否定を述べなさい。

- ① $x \neq 3$ または $y \geq 5$ ② $x > 2$ かつ $x \neq 7$ ③ $2 \leq x < 5$
 ④ n は奇数 かつ n は7の倍数 ⑤ x と y の少なくとも一方は奇数である

【解答】① $x = 3$ かつ $y < 5$ ② $x \leq 2$ または $x = 7$
 ③ $x < 2$ または $5 \leq x$ (注：安易に不等号の向きだけに目を向けて、 $2 > x \geq 5$ としてはいけません。2より小さくて5以上の数なんてありませんね。) ④ n は偶数 または n は7の倍数ではない ⑤ x と y はともに偶数である

【3】一般にある命題が「 $p \Rightarrow q$ 」の形で表現されており、それが真であるとき、 p を q が成り立つための「十分条件」と言い、また q を p が成り立つための「必要条件」と言います。その際、もし p と q 等しければ、それぞれを相手が成り立つための「必要十分条件」と言います。

ところで必要条件と十分条件の問題は、いつも「 $p \Rightarrow q$ 」の形で表現されるとは限りません。一方を満たす解の集合が他方を満たす解の集合を完全に含むとき、解の集合の小さい方を大きい方が成り立つための「十分条件」と言い、大きい方を小さい方が成り立つための「必要条件」と言います。この「十分」と「必要」という言葉の使い方は、日常生活の中で「小さい方で十分です」、「大きい方が必要です」という日本語を使う時の考え方と同じですね。

【問題】 x, y, z を実数とします。次の□の中には、「十分条件であるが必要条件ではない」、「必要条件であるが十分条件ではない」、「必要十分条件である」、「必要条件でも十分条件でもない」のどれが入りますか。

- ① $x^2 - 2x - 24 = 0$ は $x = 6$ であるための□ ② $x \neq 4$ は $(x - 3)(x + 6) = 0$ であるための□
 ③ $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 0$ であることは $(x - 2)(y - 3) = 0$ であるための□
 ④ 四角形ABCDが平行四辺形であることは、四角形ABCDが正方形であるための□
 ⑤ $xy \neq 0$ であることは、 $x^2 + y^2 \neq 0$ であるための□
 ⑥ $\triangle ABC$ が鋭角三角形であることは、 $\angle C < 90^\circ$ であるための□
 ⑦ $\triangle ABC$ において、 $AB = c, BC = a, CA = b$ とすると、 $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形であることは、
 $(b - c)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$ であるための□
 ⑧ $x + y$ と xy が共に有理数であることは、 x と y が共に有理数であるための□
 ⑨ $(y - z)(z - x) = 0$ であることは、 $x = y = z$ であるための□
 ⑩ $x = y = 1$ あることは、 $xy = 1$ であるための□

- 【解答】** ⑥必要条件であるが十分条件ではない。**【解説】** $x^2 - 2x - 24 = 0$ の解は $x = -4, 6$ で $x = 6$ を含みます。つまり $x^2 - 2x - 24 = 0$ の解の集合の方が大きい。
- ②必要条件であるが十分条件ではない。**【解説】** $x \neq 4$ とは、 $x < 4$ または $4 < x$ のことですから、 $(x-3)(x+6) = 0$ の解の $x = 3, -6$ 含みます。
- ③十分条件であるが必要条件ではない。**【解説】** $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 0$ の解は $(x, y) = (2, 3)$ のみですが $(x-2)(y-3) = 0$ の解には、 $(x, y) = (2, 3)$ 以外にも $(x, y) = (2, 5), (0, 3)$ など沢山あります。
- ④必要条件であるが十分条件ではない。**【解説】** 平行四辺形の中に正方形は含まれます。
- ⑤十分条件であるが、必要条件ではない。**【解説】** $xy = 0$ を満たす実数解は $(x, y) = (0, 0), (0, 3), (-2, 0), (0, 10), \dots$ など、沢山あります。一方、 $x^2 + y^2 = 0$ を満たす実数解は $(x, y) = (0, 0)$ のみです。よって $xy \neq 0$ を満たす解は、 $(x, y) = (0, 0), (0, 3), (-2, 0), \dots$ 等両方が0か、一方が0である2数の組以外の全ての数で、 $x^2 + y^2 \neq 0$ は $(x, y) = (0, 0)$ 以外の全ての数で、すから、 $x^2 + y^2 \neq 0$ を満たす x, y の組の集合の方が大きいと言えます。
- ⑥十分条件であるが必要条件ではない。**【解説】** $\triangle ABC$ が鋭角三角形ならば、必ず $\angle C < 90^\circ$ が成り立つと言えますが、逆は言えません。つまり $\angle C < 90^\circ$ を満たす三角形の集合に鋭角三角形は全て含まれます。
- ⑦必要条件でも十分条件でもない。**【解説】** $\triangle ABC$ が直角二等辺三角形である場合は、次の3通りがあります。つまり「 $a = b$ かつ $a^2 + b^2 = c^2$ 」。「 $b = c$ かつ $b^2 + c^2 = a^2$ 」
「 $c = a$ かつ $c^2 + a^2 = b^2$ 」ですね。ところが、 $(b-c)(b^2 + c^2 - a^2) = 0$ というのは、
「 $b = c$ かつ $b^2 + c^2 = a^2$ 」と「 $b \neq c$ かつ $b^2 + c^2 = a^2$ 」、「 $b = c$ かつ $b^2 + c^2 \neq a^2$ 」の3つの場合があり、一部は重なりますが、一方が他方を含むわけではありません。
- ⑧必要条件であるが十分条件ではない。**【解説】** 「 $x + y$ と xy が共に有理数である」 $\Rightarrow$ 「 x と y が共に有理数である」については、 $x = 2 + \sqrt{3}, y = 2 - \sqrt{3}$ という反例があるから偽と分かります。一方、「 $x + y$ と xy が共に有理数である」 $\Leftarrow$ 「 x と y が共に有理数である」が真であることは明白ですね。
- ⑨必要条件であるが十分条件ではない。**【解説】** $x = y = z$ であれば、 $(y-z)(z-x) = 0$ は成り立ちますが、逆は成り立ちません。例えば $(y-z)(z-x) = 0$ の中には、 $y = z \neq x$ の場合もあります。
- ⑩十分条件であるが必要条件ではない。**【解説】** $x = y = 1$ であれば、 $xy = 1$ は成り立ちますが、逆は成り立ちません。

【4】 中学校で学んだ英語の復習を少しやってみましょう。I know some of them.の日本語訳は「私は彼らの何人かを知っている。」ですが、大切なポイントは「(彼らのうちの) ある人を知っている」です。その否定はI don't know any of them.「私は彼らのうちの誰も知らない。」つまり「(彼らのうちの) 全ての人を知らない」です。こんな話を持ち出したのは、例えば「全ての実数 x について、 $(x+3)^2 > 0$ 」という命題の否定が「ある実数 x について、 $(x+3)^2 \leq 0$ 」であることが分かって欲しいからなんです。皆さん、分かりましたか。ところで、例にあげた2つの命題の真偽はどうなりますか。

【解答】 「全ての実数 x について、 $(x+3)^2 > 0$ 」は偽です。なぜなら $x = -3$ の時は成り立たないからです。また、「ある実数 x について、 $(x+3)^2 \leq 0$ 」は真ですね。なぜなら $x = -3$ の時に成り立つからです。「ある〇〇について・・・」の場合、たった1つでもその命題を満たすものがあれば、真と言えます。