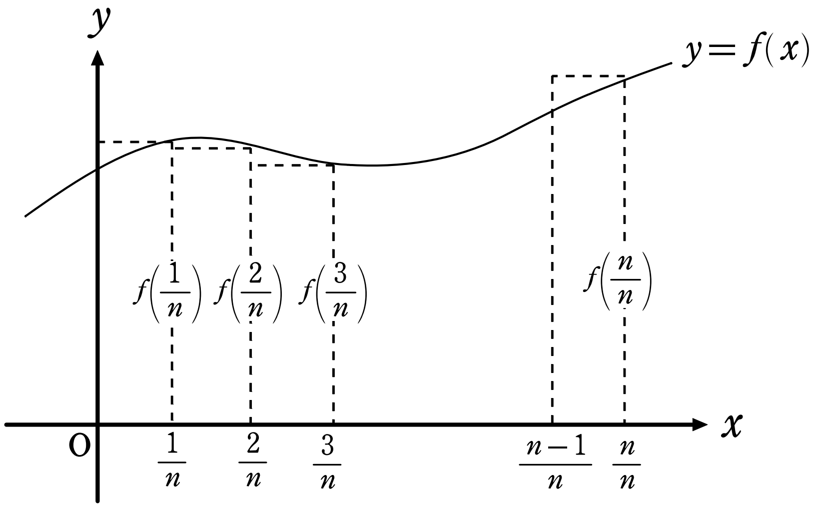
区分求積法の考え方とその利用　　by Aokijuku

問題　下の絵を参考にして、区分求積法について説明しなさい。



解答　上の図で、底辺が $\frac{1}{n}$ で、高さが $f\left(\frac{k}{n}\right)(k=1,2,3,\cdots,n)$ の長方形を集めると、それらの面積を総和は

$\frac{1}{n}\left\{f\left(\frac{1}{n}\right)+f\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{n}{n}\right)\right\}$　つまり、$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$ となる。この式で、$n\to\infty$ として極限を取ると、上図より $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)dx$　となると分かる。これが区分求積法の意味である。

例題　次の極限値を積分を利用して求めなさい。

(1) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}$　　(2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{2n}}$　　(3) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2+\left(1+\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\left(1+\frac{n}{n}\right)^2\right\}$

解答 (1)　$f\left(\frac{k}{n}\right)=\sin\frac{\pi k}{3n}$　より　$f(x)=\sin\frac{\pi}{3}x$　よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sin\frac{\pi k}{3n}=\int_0^1\sin\frac{\pi}{3}xdx$ となり

$\frac{\pi}{3}x=t$ とおいて、両辺を t で微分すると　$\frac{\pi}{3}\cdot\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=\frac{3}{\pi}$　また

x	$0\to1$
t	$0\to\frac{\pi}{3}$

よって、(与式)$=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin t\,dt=\frac{3}{\pi}\Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left\{-\frac{1}{2}-(-1)\right\}=\frac{3}{2\pi}$

(2)　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{\frac{k}{2n}}=\int_0^1 e^{\frac{x}{2}}dx$　　$\frac{x}{2}=t$ とおいて、両辺を t で微分すると　$\frac{1}{2}\cdot\frac{dx}{dt}=1$

$\therefore\ \frac{dx}{dt}=2$　また

x	$0\to1$
t	$0\to\frac{1}{2}$

よって、(与式)$=2\int_0^{\frac{1}{2}}e^t dt=2\Big[e^t\Big]_0^{\frac{1}{2}}=2(\sqrt{e}-1)$

(3) (与式)$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)^2=\int_0^1(1+x)^2dx=\left[\frac{1}{3}(1+x)^3\right]_0^1=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$