

今回は、内積の計算法則について学びます。内積の計算法則には、以下の4つがあります。今から、それを1つ1つ証明してみましょう。

$$\textcircled{1} \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad (\text{交換法則})$$

$$\textcircled{2} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad (\text{分配法則})$$

$$\textcircled{3} k\vec{a} \cdot l\vec{b} = kl\vec{a} \cdot \vec{b}$$

$$\textcircled{4} \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

まず、①の交換法則です。今、 \vec{a} と \vec{b} の2つの成分をそれぞれ $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$ とします。このとき、 $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 = x_2x_1 + y_2y_1 = \vec{b} \cdot \vec{a}$ が成り立ちます。(「ベクトルの超基本③」で習ったように、ベクトルの内積はx成分同士の積とy成分同士の積の和でしたね。)

次は②の分配法則です。 $\vec{a}=(x_1, y_1)$, $\vec{b}=(x_2, y_2)$ に加え、 \vec{c} の成分を $\vec{c}=(x_3, y_3)$ とします。このとき、 $\vec{b} + \vec{c} = (x_2, y_2) + (x_3, y_3) = (x_2 + x_3, y_2 + y_3)$ となり、これと $\vec{a}=(x_1, y_1)$ との内積を計算すると(再度、内積がx成分同士の積とy成分同士の積の和であることを思い出して下さい。)

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) = x_1x_2 + y_1y_2 + x_1x_3 + y_1y_3 = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \text{ が成り立ちます。}$$

最後に④の証明です。 $\vec{a}=(x_1, y_1)$ より、 $\vec{a} \cdot \vec{a} = x_1x_1 + y_1y_1 = (\sqrt{x_1^2 + y_1^2})^2 = |\vec{a}|^2$ が成り立ちます。

特に④の計算法則の利用については、十分な理解が必要です。④の法則の意味は、同じベクトルの内積は、そのベクトルの絶対値の2乗に等しいという意味で、それを使うと、例えば $|\vec{3a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{3a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{3a} + 2\vec{b})$ が成り立つことが分かります。

この右辺を①から④の計算法則を使って展開すると、 $|\vec{3a} + 2\vec{b}|^2 = (\vec{3a} + 2\vec{b}) \cdot (\vec{3a} + 2\vec{b}) = 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$ と計算出来ます。但し、普通は真ん中の式を省略し $|\vec{3a} + 2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2$ と計算するので注意が必要です。決して、 $|\vec{3a} + 2\vec{b}|^2 = 9|\vec{a}|^2 + 12|\vec{a}||\vec{b}| + 4|\vec{b}|^2$ としないようにして下さい。(省略した真ん中の式を考えれば、間違いであることは分かりますね。)

では、④の性質を使った問題を1つ解いて見ましょう。よく出て来るのが、次のような問題です。

問題 $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=2$, $|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7}$ のとき、 \vec{a} と \vec{b} のなす角 θ の大きさを求めなさい。

(考え方のポイント) 2つのベクトルを足したものの絶対値は、一般には、そのままでは使い道がなく、必ず2乗して使います。

解答 $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ 、つまり $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$ に

$$|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2, |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{7} \text{ を代入すると、} 7 = 1 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + 4 \text{ より、} \vec{a} \cdot \vec{b} = 1$$

これに「ベクトルの超基本③」で学んだ内積の定義を利用すると、 $|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta = 1$ これに再度、 $|\vec{a}|=1, |\vec{b}|=2$ を

代入し、 $\cos\theta = \frac{1}{2}$ となり、これを $0 \leq \theta \leq 180^\circ$ で解いて（※2つのベクトルのなす角 θ は、2つのベクトルが同じ方向を向いている 0° から、正反対の向きを向いている 180° の範囲で求めることになっています。） $\theta = 60^\circ$ となります。

皆さんが、普段使っている問題集にも似たような問題がいくつも出ていると思うので、それらを解いて、内積の計算に慣れて下さいね。