

正弦・余弦定理を利用する問題の中に、次のような問題があります。

【例題】 次の条件が与えられているとき、 $\triangle ABC$ の残りの辺と角の大きさを求めなさい。

$$b=2\sqrt{3}, c=3-\sqrt{3}, A=120^\circ$$

(考え方のポイント) このように残りの辺と角の大きさを求める問題では、まず正弦定理が使えないかを考えます。それで、もし使えなかったら、その時、初めて余弦定理を使うことを考えます。この問題では、2組の対応する辺と角のうち、1つだけが分かっていないという想定にはなっていませんから、最初から正弦定理は使えません。一方、余弦定理は3つの辺と1つの角が関わる定理で、この問題では角が1つ分かっており、3つの辺のうち、1つの辺 a だけが分かっていないという想定ですから、余弦定理を使うことにより a の大きさを求めることが可能です。 a が分かったら、その後は正弦定理を利用します。

【解答】 余弦定理より $a^2 = b^2 + c^2 - 2bccos A$

$$\begin{aligned} &= (2\sqrt{3})^2 + (3-\sqrt{3})^2 - 2 \times 2\sqrt{3} \times (3-\sqrt{3}) \times \cos 120^\circ \\ &= 12 + 9 - 6\sqrt{3} + 3 - 2 \times 2\sqrt{3} \times (3-\sqrt{3}) \times \left(-\frac{1}{2}\right) \\ &= 24 - 6\sqrt{3} + 6\sqrt{3} - 6 \\ &= 18 \end{aligned}$$

$$a = \pm 3\sqrt{2} \quad a > 0 \text{ より } a = 3\sqrt{2}$$

次に正弦定理より $\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$ ← **【注】** b と c では、 b の方が簡単な数字であるから、そちらの正弦定理を使

うこと。複雑な値の $c=3-\sqrt{3}$ を使うと角度は求められない。

$$\frac{2\sqrt{3}}{\sin B} = \frac{3\sqrt{2}}{\sin 120^\circ} \quad \text{両辺の逆数を取って} \quad \frac{\sin B}{2\sqrt{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}} \quad \sin B = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\sqrt{2}} \times 2\sqrt{3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを $0^\circ < B < 60^\circ$ で解いて $B = 45^\circ$ ← **【注】** $A = 120^\circ$ だから、残りの角の中で適する値を求める。

更に $C = 180^\circ - A - B = 180^\circ - 120^\circ - 45^\circ = 15^\circ$ ← **【注】** 最後に残った角は、引き算を使って簡単に求めるように。間違っても、正弦定理などは使わないように。