# （入試演習）　　　　　　積分と漸化式

---

**問題**　$n$ を自然数とする。$I_0=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx$，$I_n=\int_0^1 x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx$ とおく。

(1)　$I_0$ の値を求めよ。

(2)　関数 $f_n(x)=x^{2n-1}(4-x^2)^{\frac{3}{2}}$ $(-2<x<2)$ の導関数を求めよ。

(3)　$I_n$ を $I_{n-1}$ を用いて表せ。

(4)　$I_1$ と $I_2$ の値を求めよ。

**解答**　(1)　$x=2\sin\theta$ とおくと　　$dx=2\cos\theta\,d\theta$

| $x$ | $0\to 1$ |
|---|---|
| $\theta$ | $0\to\frac{\pi}{6}$ |

$0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき，$\cos\theta>0$ であるから

$$\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4(1-\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$

よって　$$I_0=\int_0^1\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{6}}2\cos\theta\cdot 2\cos\theta\,d\theta$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{6}}\cos^2\theta\,d\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{6}}(\cos 2\theta+1)d\theta$$

$$=\Big[\sin 2\theta+2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}$$

(2)　$$f_n{}'(x)=(2n-1)x^{2n-2}\cdot(4-x^2)^{\frac{3}{2}}+x^{2n-1}\cdot\frac{3}{2}(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2x)$$

$$=(2n-1)(4-x^2)x^{2n-2}\sqrt{4-x^2}-3x^{2n}\sqrt{4-x^2}$$

$$=4(2n-1)x^{2n-2}\sqrt{4-x^2}-2(n+1)x^{2n}\sqrt{4-x^2}$$

(3)　(2) から　　$$x^{2n}\sqrt{4-x^2}=\frac{1}{2(n+1)}\left\{4(2n-1)x^{2n-2}\sqrt{4-x^2}-f_n{}'(x)\right\}$$

両辺を積分すると

$$\int_0^1 x^{2n}\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{2(2n-1)}{n+1}\int_0^1 x^{2(n-1)}\sqrt{4-x^2}\,dx-\frac{1}{2(n+1)}\int_0^1 f_n{}'(x)dx$$

整理すると　　$$I_n=\frac{2(2n-1)}{n+1}I_{n-1}-\frac{1}{2(n+1)}\Big[f_n(x)\Big]_0^1$$

$f_n(1)=3\sqrt{3}$，$f_n(0)=0$ であるから　　$$I_n=\frac{2(2n-1)}{n+1}I_{n-1}-\frac{3\sqrt{3}}{2(n+1)}$$

(4)　(1)，(3) の結果から　　$$I_1=I_0-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\frac{3\sqrt{3}}{4}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$I_2=2I_1-\frac{\sqrt{3}}{2}=2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{2}{3}\pi-\sqrt{3}$$