

「対数が苦手」という人が多いですが、皆さんが思っているほど、対数は難しいものではありません。対数ができるようになる第一歩は、対数に絡む公式の意味をしっかりと理解することです。ここでは対数公式の意味とその作り方について学びます。

まず、対数関数と指数関数は裏表の関係にある一体のものであるということから、学びましょう。

誰もが $2^3=8$ となることを知っていると思いますが、この式の意味は文字通り「2を3乗すると8になる」ということです。では、次の質問に答えて下さい。「2を何乗したら8になりますか」 勿論、3ですね。それを式に表すと $\log_2 8=3$ となります。 $\log_2 8$ という記号の意味は、「8は2の何乗か」ということを尋ねているのです。では、 $\log_3 81$ はいくつになりますか。「81は3の何乗か」と尋ねているのですから、 $\log_3 81=4$ となります。

つまり指数と対数の間には、次の関係が成り立ちます。

$$a^m = M \Leftrightarrow \log_a M = m \quad (\text{但し、} a > 0, a \neq 1, M > 0)$$

(用語を覚えよう)

$\log_a M$ の a を対数の「底（てい）」と呼びます。底は必ず正で、しかも1ではありません。なぜなら、 a は負だと、例えば $(-2)^{0.3}$ などの符号が定義できませんね。また、 a が0では何乗しても0になり、 $0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$ など定義できません。更に a が1だと、1は何乗しても1なので $\log_1 1$ の値が決まりません。ですから、底は正で1ではないのです。更に、 M は真数と呼ばれますが、真数は必ず正となります。なぜなら $\log_a M = m$ において、 $M = a^m$ が成り立ちますが、正の数である a を何乗しても、その結果である M は正となるからです。

では、これから実際に対数公式を作ってみましょう。まず2つの指数が絡む式を用意します。その2つとは $a^m = M \dots \textcircled{1}$ と $a^n = N \dots \textcircled{2}$ （但し、 $a > 0, a \neq 1, M > 0, N > 0$ ）です。

①と②の式を辺々掛け合わせるとどうなりますか。 $a^m \times a^n = M \times N$ すなわち $a^{m+n} = MN$ ですね。

指数と対数の関係を利用すると $a^{m+n} = MN \Leftrightarrow \log_a MN = m+n$ となります。ところで、①と②から、それぞれ $\log_a M = m, \log_a N = n$ となりますから

$$\log_a MN = m+n \text{ より } \log_a MN = \log_a M + \log_a N \text{ が成り立ちます。}$$

次は①式を②式で辺々割ってみましょう

$$a^m \div a^n = M \div N \text{ すなわち } a^{m-n} = \frac{M}{N} \text{ ですね。これも指数と対数の関係より}$$

$$a^{m-n} = \frac{M}{N} \Leftrightarrow \log_a \frac{M}{N} = m-n \text{ つまり } \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \text{ が成り立ちます。}$$

さて、今度は $a^m = M$ の式の両辺を p 乗してみます。勿論、 $a^{mp} = M^p$ ですね。この式を少し変形しましょう。
 $a^{pm} = M^p$ ここで指数と対数の関係を利用すると $\log_a M^p = pm \dots \textcircled{3}$ となります。 $m = \log_a M$ ですから、

③式は $\log_a M^p = p \log_a M \dots \textcircled{4}$ となります。

さて、いよいよ最後の公式です。

$a^m = M$ において、底 $= b$ ($b > 0, b \neq 1$) とする両辺の対数を取るとどうなりますか。 $\log_b a^m = \log_b M$ ですね。
 ここで今、学んだばかりの④の公式を利用すると $m \log_b a = \log_b M$ となり、両辺を $\log_b a$ で割ると

$$m = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \text{つまり} \quad \log_a M = \frac{\log_b M}{\log_b a} \quad \text{となります。この公式をもっと分かり易くするために、文字を変えて}$$

$$\text{書き直して見ましょう。} \quad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad \text{となりますね。左辺の底と真数がそれぞれ右辺の分母と分子の真数}$$

となって分かれていることに注意しましょう。

以上をまとめると次のようになります。

【対数公式】 但し、真数は全て正であり、底は1ではない正の数である。

$$(1) \log_a MN = \log_a M + \log_a N$$

$$(2) \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$$

$$(3) \log_a M^p = p \log_a M$$

$$(4) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (\text{※これを底の変換公式と呼ぶ。})$$