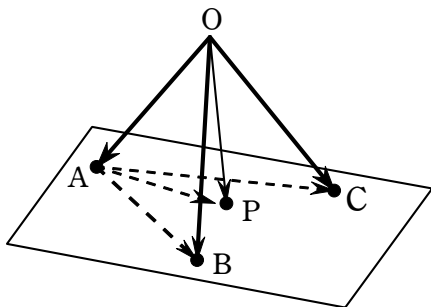


空間ベクトルの重要問題① (3点で決まる平面上の点)

by Aokijuku

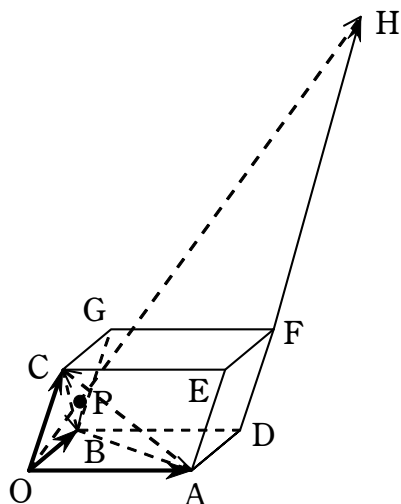
問題 下図のように3点A, B, Cで決まる平面上にある点Pを表すベクトル方程式を $\overrightarrow{OP} = \square$ の形で導きなさい。



解答 上図より $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OA} + s(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) + t(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA})$
 $= (1-s-t)\overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{OB} + t\overrightarrow{OC}$ (但し、 s, t は実数)

注 ポイントは、3点で決まる平面上の点は、その3点を表すベクトルの和で表されることと、それぞれの係数の和が1になるということです。これはとても大切な定理ですから、確実に習得して下さい。

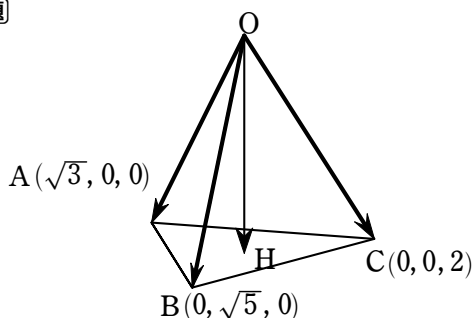
問題



左図の平行六面体OADB-CEFGにおいて
 $DF : DH = 1 : 4$ である。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$
 $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とし、線分OHと平面ABCの交点をP
 とするとき、 $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ で表しなさい。

解答 仮定より $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}$ ところで点Pは線分OH上にあるので、 $\overrightarrow{OP} = k\overrightarrow{OH}$ (k は実数)
 と表せる。このとき $\overrightarrow{OP} = k\vec{a} + k\vec{b} + 4k\vec{c}$ となり、点Pが3点A, B, Cで決まる平面上にあるので
 $k + k + 4k = 1$ より $k = \frac{1}{6}$ となる。 よって $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{6}\vec{a} + \frac{1}{6}\vec{b} + \frac{2}{3}\vec{c}$ と表せる。

問題



図のように四面体OABCがある。頂点Oから底面ABCに下ろした垂線の足をHとしたとき、OHの長さや三角形ABCの面積を求めることにより、この四面体の体積を求めなさい。

空間ベクトルの重要問題① (3点で決まる平面上の点)

by Aokijuku

解答 3つのベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ について、 $|\overrightarrow{OA}|=\sqrt{3}$, $|\overrightarrow{OB}|=\sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OC}|=2$, $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=0$,

$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=0$ が成り立つ。さて、点Hは3点A, B, Cで決まる平面上にあるので

$\overrightarrow{OH}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}$ (s, t は実数) と表すと

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より、 $\{s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA})=0$

これを展開すると異なるベクトルの内積は全て0となるので $-3s+5t=0\cdots\textcircled{1}$ となる。

また、 $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ より、 $\{s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+(1-s-t)\overrightarrow{OC}\}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$

これを展開して、 $-5t+4(1-s-t)=0\cdots\textcircled{2}$

①, ②を連立して解くと $(s, t)=\left(\frac{20}{47}, \frac{12}{47}\right)$ となる。

このとき $\overrightarrow{OH}=\frac{20}{47}(\sqrt{3}, 0, 0)+\frac{12}{47}(0, \sqrt{5}, 0)+\frac{15}{47}(0, 0, 2)=\left(\frac{20\sqrt{3}}{47}, \frac{12\sqrt{5}}{47}, \frac{30}{47}\right)$ となる。

よって $|\overrightarrow{OH}|=\frac{2}{47}\sqrt{(10\sqrt{3})^2+(6\sqrt{5})^2+15^2}=\frac{2}{47}\times\sqrt{705}=\frac{2\sqrt{705}}{47}$

また $(\triangle ABC\text{の面積})=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$ について

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(-\sqrt{3}, \sqrt{5}, 0)$, $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}=(-\sqrt{3}, 0, 2)$ だから、

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{7}$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3$ となり

$(\triangle ABC\text{の面積})=\frac{1}{2}\sqrt{8\times 7-9}=\frac{\sqrt{47}}{2}$

以上より (四面体OABCの体積) $=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{47}}{2}\times\frac{2\sqrt{705}}{47}=\frac{\sqrt{15}}{3}$ となる。