

3 倍角の公式は結構出題されることがありますが、別に無理して覚える必要はありません。加法定理と 2 倍角の公式にさえ習熟していれば、いつでも簡単に作れます。今回は、そんな 3 倍角の公式の作り方を学ぶことにします。

ポイントは $\sin 3\alpha$ は $\sin \alpha$ だけで、 $\cos 3\alpha$ は $\cos \alpha$ だけで表すように考えながら変形することです。

さて、では $\sin 3\alpha$ からやってみましょう。

加法定理と 2 倍角の公式を利用すると

$$\begin{aligned}\sin 3\alpha &= \sin(2\alpha + \alpha) = \sin 2\alpha \cos \alpha + \cos 2\alpha \sin \alpha = 2\sin \alpha \cos^2 \alpha + (1 - 2\sin^2 \alpha)\sin \alpha \\ &= 2\sin \alpha(1 - \sin^2 \alpha) + \sin \alpha(1 - 2\sin^2 \alpha) = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha\end{aligned}$$

つまり $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ となります。

$$\begin{aligned}\text{更に } \cos 3\alpha &= \cos(2\alpha + \alpha) = \cos 2\alpha \cos \alpha - \sin 2\alpha \sin \alpha = (2\cos^2 \alpha - 1)\cos \alpha - 2\sin^2 \alpha \cos \alpha \\ &= \cos \alpha(2\cos^2 \alpha - 1) - 2(1 - \cos^2 \alpha)\cos \alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha\end{aligned}$$

つまり $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ となります。

ところで、 $\sin 3\alpha = 3\sin \alpha - 4\sin^3 \alpha$ と $\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos \alpha$ の 2 式の右辺を比べると、1 次の項と 3 次の項の符号が逆になっていることに気づきますか。つまり、テストの際に公式が必要になって作るときには $\sin 3\alpha$ か $\cos 3\alpha$ のどちらか一方の公式だけを作って、もう 1 つの 3 倍角の公式は 1 次の項と 3 次の項の符号を逆にすることで良いことになります。

この例のように、公式は何もかも覚えるものではありません。覚えるのは最小限のものに限り、必要となれば作れるようにしておくことこそが大切なのです。そもそも数学に覚えることなどほとんどありません。なるべく覚えなことこそ数学の常道と言えます。