

問題 a を実数とする。関数 $f(x)$ を次のように定める。 $f(x) = 1 - x + x^2 + a[x] - 2x[x] + [x]^2$

ただし、実数 x に対し、記号 $[x]$ は $n \leq x < n+1$ を満たす整数 n を表す。たとえば $[0]=0$, $[\sqrt{2}]=1$, $\left[\frac{5}{2}\right]=2$ である。

- (1) $0 \leq x < 1$ の範囲において、 $f(x)$ を x の整式で表せ。
- (2) $1 \leq x < 2$ の範囲において、 $f(x)$ を a を用いた x の整式で表せ。
- (3) $f(x)$ が $x=1$ で連続であるように、 a の値を定めよ。
- (4) $f(x+1) - f(x)$ を a を用いて表せ。ただし、 $[x+1]=[x]+1$ であることは証明せずに用いてよい。
- (5) a を (3) で定めた値とする。 n を正の整数とすると、 $\int_0^n f(x) dx$ を n を用いて表せ。