

解説 この単元の問題を解く上で、とても大切なのは「順列」と「組合せ」の違いを正確に理解することです。「順列」は、いくつかの異なるものの中から何個かを選び、それを並べる並べ方（「並べる」のではなく、会長、副会長、書記などの異なった役割を与えるのも同様です）のことをいい、「組合せ」とは、いくつかの異なるものの中から何個かを選ぶ選び方（選ぶだけで並べません）のことをいいます。

具体的な例を使って説明しましょう。

問題 a, b, c, d, e 5つの文字から3個を選んで並べる並べ方は何通りありますか。

解答 「選んで並べる」とありますから、当然、順列の問題となります。問題には「選んで並べる」とありますが、同時に3個選んでから並べても、1個ずつ選んで並べても、並べ方の種類に違いはありませんから、1個ずつ選んで並べることになります。

まず、□□□と並べる場所を用意しておき、1個ずつ選んで左から並べることにします。最初は5個のうち、どれを選んでも良いですから選び方は5通りあり、それを一番左に置くことにします。次は残った4個のうちから1つを選びますから、選び方は4通りで、それを真ん中に置くことにします。最後に残った3個のうちから1つを選んで一番右に置くことにします。このとき大切なのは、全体で何種類の並べ方があるかは、足し算ではなく掛け算を使うということです。なぜなら、一番左に並べるのは a から d の5通りのどれでもよく、そのそれぞれについて真ん中に置く文字は4通り選べるから、一番左と真ん中の並べ方は 5×4 (通り) あります。そのうちの1通り、例えば eb □について、□に入れる文字は3通り選べるので、全体で $5 \times 4 \times 3 = 60$ (通り) あることになります。このように「異なる5つのものから3つ選んで並べる並べ方」の個数を ${}_5P_3$ と書き、 ${}_5P_3 = 5 \times 4 \times 3$ となります。

(問題練習) 次の数を求めなさい。

(1) ${}_6P_3$ (2) ${}_{10}P_2$ (3) ${}_nP_2$

(解答) (1) ${}_6P_3 = 6 \times 5 \times 4 = 120$ (2) ${}_{10}P_2 = 10 \times 9 = 90$ (3) ${}_nP_2 = n(n-1)$

解説 次は「組合せ」について考えてみましょう。「組合せ」は「順列」と違って、いくつかの異なるものの中から何個かを選ぶだけで、並べることはしません。その計算方法を具体的な例を使って説明しましょう。

問題 a, b, c, d, e 5つの文字から3個を選ぶ選び方は何通りありますか。

解答 繰り返しますが、「組合せ」は選ぶだけで並べることはしません。仮に、この問題の答えが x 通りだとしましょう。そのうちの1通り、例えば a, d, e を選んだとしましょう。ところで、もし、これを並べたら何通りの並べ方があるでしょうか。勿論、その答えは、 $3!$ 通りですね。ところで、組合せとして仮においた x と、この $3!$ をかけたら、一体、何が出てくるのでしょうか。ええっと、異なる5つの文字から3つを選び、それからその3つを並べたのだから...。そうです。 ${}_5P_3$ になりますね。

つまり、 $x \times 3! = {}_5P_3$ より、 $x = \frac{{}_5P_3}{3!}$ となります。このとき、 $\frac{{}_5P_3}{3!} = {}_5C_3$ と表します。

よって、 ${}_5C_3 = \frac{{}_5P_3}{3!} = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 10$ (通り) となりますね。