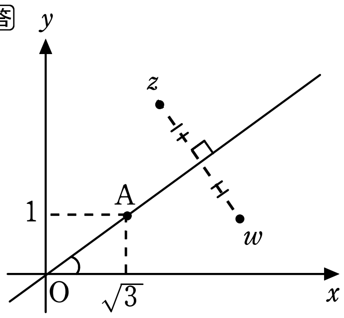
複素数平面の基礎 ②　　by Aokijuku

今回は、複素数を利用して原点を通る直線についての対称移動について学びます。

例題　複素数平面上にある２点、O(0)、A$(\sqrt{3}+i)$ を通る直線OAに関して点 z を対称移動した点を w とするとき、w を z を用いて表しなさい。

解答



直線OAと x 軸のなす角は、ちょうど $\dfrac{\pi}{6}$ になりますね。まず、２点 z、w、そして直線OAを原点Oの周りに $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転移動した状態を思い浮かべて見ましょう。点 z を原点の周りに $-\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転移動すると

$z\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$ となります。更に、それを実軸について対称移動すると $\overline{z\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}}=\overline{z}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)-i\sin\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)\right\}$

つまり　$\overline{z}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ となります。そして、更にその点を原点の周りに $\dfrac{\pi}{6}$ だけ回転移動すれば w になりますから　$w=\overline{z}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)^2=\overline{z}\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=\overline{z}\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)$ となりますね。