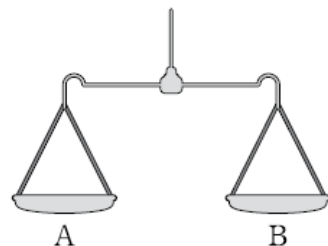


共通テスト対策（整数の問題 ①）

問題 ある物体 X の質量を天秤ばかりと分銅を用いて量りたい。

天秤ばかりは支点の両側に皿 A, B が取り付けられており、両側の皿にのせたものの質量が等しいときに釣り合うように作られている。分銅は 3 g のものと 8 g のものを何個でも使うことができ、天秤ばかりの皿の上には分銅を何個でものせることができるものとする。以下では、物体 X の質量を M (g) とし、 M は自然数であるとする。



(1) 天秤ばかりの皿 A に物体 X をのせ、皿 B に 3 g の分銅 3 個をのせたところ、天秤ばかりは B の側に傾いた。さらに、皿 A に 8 g の分銅 1 個をのせたところ、天秤ばかりは A の側に傾き、皿 B に 3 g の分銅 2 個をのせると天秤ばかりは釣り合った。このとき、皿 A, B にのせているものの質量を比較すると $M + 8 \times \boxed{\text{ア}} = 3 \times \boxed{\text{イ}}$ が成り立ち、 $M = \boxed{\text{ウ}}$ である。上の式は $3 \times \boxed{\text{イ}} + 8 \times (-\boxed{\text{ア}}) = M$ と変形することができ、 $x = \boxed{\text{イ}}$, $y = -\boxed{\text{ア}}$ は、方程式 $3x + 8y = M$ の整数解の 1 つである。

解答 順番に内容を式にしていこう。「皿 A に物体 X をのせ、皿 B に 3 g の分銅 3 個をのせたところ、天秤ばかりは B の側に傾いた」のだから、 $M < 3 \times 3$ となる。

次に「さらに、皿 A に 8 g の分銅 1 個をのせたところ、天秤ばかりは A の側に傾き、皿 B に 3 g の分銅 2 個をのせると天秤ばかりは釣り合った」のだから、 $M + 8 \times 1 = 3 \times 5$ となるね。

だから、 $\boxed{\text{ア}}$ には $\boxed{1}$, $\boxed{\text{イ}}$ には $\boxed{5}$, $\boxed{\text{ウ}}$ には $\boxed{7}$ が入ると分かるね。

(2) $M = 1$ のとき、皿 A に物体 X と 8 g の分銅 $\boxed{\text{エ}}$ 個をのせ、皿 B に 3 g の分銅 3 個をのせると釣り合う。よって、 M がどのような自然数であっても、皿 A に物体 X と 8 g の分銅 $\boxed{\text{オ}}$ 個をのせ、皿 B に 3 g の分銅 $\boxed{\text{カ}}$ 個をのせることで釣り合うことになる。 $\boxed{\text{オ}}$, $\boxed{\text{カ}}$ に当てはまるものを、次の ① ~ ⑤ のうちから 1 つずつ選べ。ただし、同じものを選んでよい。

- ① $M - 1$ ② M ③ $M + 1$ ④ $M + 3$ ⑤ $3M$ ⑥ $5M$

解答 「 $M = 1$ のとき、皿 A に物体 X と 8 g の分銅 $\boxed{\text{エ}}$ 個をのせ、皿 B に 3 g の分銅 3 個をのせると釣り合う」

のだから、 $\boxed{\text{エ}}$ に入る数を x とすれば、 $1 + 8x = 3 \times 3$ となるから、当然、 $x = 1$ となり、 $\boxed{\text{エ}}$ には $\boxed{1}$ が

入り、 $1 + 8 \times 1 = 3 \times 3$ となるね。この両辺に M をかけると、 $M + 8 \times M = 3 \times 3M$ となり、 $\boxed{\text{オ}}$ には $\boxed{\text{①}}$,

$\boxed{\text{カ}}$ には $\boxed{\text{④}}$ が入ると分かるね。

(3) $M = 20$ のとき、皿 A に物体 X と 3 g の分銅 p 個を、皿 B に 8 g の分銅 q 個をのせたところ、天秤ばかりが釣り合ったとする。このような自然数の組 (p, q) のうちで、 p の値が最小であるものは $p = \boxed{\text{キ}}$, $q = \boxed{\text{ク}}$ であり、方程式 $3x + 8y = 20$ のすべての整数解は、整数 n を用いて $x = \boxed{\text{ケコ}} + \boxed{\text{サ}}n$, $y = \boxed{\text{ク}} - \boxed{\text{シ}}n$ と表すこ

共通テスト対策（整数の問題 ①）

とができる。

【解答】 「 $M=20$ のとき、皿 A に物体 X と 3 g の分銅 p 個を、皿 B に 8 g の分銅 q 個をのせたところ、天秤ばかりが釣り合ったとする」のだから、 $20+3p=8q$ が成り立つけど、直感的に p, q の最小の組合せが $(p, q)=(4, 4)$ と求まれば良いけど、それが無理なら $8q-3p=20$ と変形し、更に $8q-3p=1$ としてから互除法を使う手があるよ。

$$8=3\times 2+2 \rightarrow 2=8-3\times 2 \cdots \textcircled{1} \quad 3=2\times 1+1 \rightarrow 1=3-2\times 1 \cdots \textcircled{2} \quad \textcircled{2} \text{に}\textcircled{1} \text{を代入し}$$

$$1=3-(8-3\times 2)\times 1 \text{ より } 8\times (-1)-3\times (-3)=1 \text{ となるね。この両辺を20倍し}$$

$$8\times (-20)-3\times (-60)=20 \quad \text{更に } 8q-3p=20 \quad \text{から } 8\times (-20)-3\times (-60)=20 \text{ を辺々引くと}$$

$8(q+20)-3(p+60)=0$ となるね。8 と 3 は互いに素だから、 $q+20=3k$ とおくと、 $p+60=8k$ (k は整数) となり、 $q=3k-20$, $p=8k-60$ となるね、この時、 p, q は自然数だから、 $3k-20>0$, $8k-60>0$ において、2式を共に満たす整数 k のうち、最小の元を求めると $k=8$ と分かり、この時、 $(p, q)=(4, 4)$ と分かるよね。

次にこれを使って、 x と y を求めるのだけど、同じように $3x+8y=20$ から $3\times (-4)+8\times 4=20$ を辺々引いて $3(x+4)+8(y-4)=0$ 3 と 8 は互いに素だから $x+4=8n$ とおけば、 $y-4=-3n$ となり、

$x=-4+8n$, $y=4-3n$ となるね。よって ケコ には -4 , サ には 8 , ク には 4 ,

シ には 3 が入ると分かるね。

ここの部分は結構面倒だけど、大切なことは基本に忠実であることだと思う。

(4) $M=\text{ウ}$ とする。3 g と 8 g の分銅を、他の質量の分銅の組合せに変えると、分銅をどのようにのせても天秤ばかりが釣り合わない場合がある。この場合の分銅の質量の組合せを、次の ㊸ ～ ㊻ のうちから 2 つ選べ。ただし、2 種類の分銅は、皿 A、皿 B のいずれにも何個でものせることができるものとする。また、解答の順序は問わない。

ス, セ

㊸ 3 g と 14 g ㊹ 3 g と 21 g ㊺ 8 g と 14 g ㊻ 8 g と 21 g

【解答】 問題の最初の部分より、ウ に入る数は 7 だったね。このとき、 $M+8\times M=3\times 3M$ より

$$7+8\times 7=3\times 21 \text{ となるけど、これは } 7+2\times 14=3\times 21 \text{ と変形できるし、この式そのままに}$$

$7+8\times 7=3\times 21$ とみれば、㊸ と ㊻ の場合は組合せが存在するから、消去法で考えれば、ス と セ には ㊸ と ㊹ (順不動) が入ると言えるね。いずれの場合も分銅の重さの数字が互いに素でないから駄目だね。

(5) 皿 A には物体 X のみをのせ、3 g と 8 g の分銅は皿 B にしかのせられないとすると、天秤ばかりを釣り合わせることは M の値を量ることができない場合がある。このような自然数 M の値は ソ 通りあり、そのうち最も大きい値は タチ である。ここで、 $M>\text{タチ}$ であれば、天秤ばかりを釣り合わせることで M の値を量ることができる理由を考えてみよう。

x を 0 以上の整数とすると、

(i) $3x+8\times 0$ は 0 以上であって、3 の倍数である。

共通テスト対策（整数の問題①）

(ii) $3x+8\times 1$ は8以上であって、3で割ると2余る整数である。

(iii) $3x+8\times 2$ は16以上であって、3で割ると1余る整数である。

タチ より大きな M の値は、(i), (ii), (iii) のいずれかに当てはまることから、0以上の整数 x, y を用いて

$M=3x+8y$ と表すことができ、3gの分銅 x 個と8gの分銅 y 個を皿Bにのせることで M の値を量ることができる。
このような考え方で、0以上の整数 x, y を用いて $3x+2018y$ と表すことができないような自然数の最大値を求めると、

ツテトナ である。

解答 これはなかなか思考力や読解力を要する問題だな。すぐさま **ソ** や **タチ** に入る数字が分かったとすれば、そりゃ、ある意味、ちょっとおつむが変だと思う。まず、俺たち凡人には無理だ。しかし、ヒントがありそうだよ。
「 x を0以上の整数とすると、

(i) $3x+8\times 0$ は0以上であって、3の倍数である。

(ii) $3x+8\times 1$ は8以上であって、3で割ると2余る整数である。

(iii) $3x+8\times 2$ は16以上であって、3で割ると1余る整数である。

タチ より大きな M の値は、(i), (ii), (iii) のいずれかに当てはまることから、0以上の整数 x, y を用いて

$M=3x+8y$ と表すことができ、3gの分銅 x 個と8gの分銅 y 個を皿Bにのせることで M の値を量ることができる」

この部分を読み解くと、(I), (II), (III) 全ての条件を満たすとき、つまり x が0以上の整数で、 $8y$ の y が2以上の整数のとき、言い換えれば、16以上の整数 M は $M=3x+8y$ の形で表すことが可能だと読める。つまり、**ソ** や

タチ に入る数字を考えるには、1から15までの数字をチェックすれば良いと言える。

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15のうち、 $M=3x+8y$ の形で表せないものをあげると、

1, 2, 4, 5, 7, 10, 13 となり、**ソ** には **7** が、**タチ** には **13** が入ると分かるね。

さて、後半の問題を解いてみよう。 $M=3x+2018y$ について、前半と同じようにすると、

「 x を0以上の整数とすると、

(i) $3x+2018\times 0$ は0以上であって、3の倍数である。

(ii) $3x+2018\times 1$ は2018以上であって、3で割ると2余る整数である。

(iii) $3x+2018\times 2$ は4036以上であって、3で割ると1余る整数である。

ツテトナ より大きな M の値は、(i), (ii), (iii) のいずれかに当てはまることから、0以上の整数 x, y を用いて

$M=3x+2018y$ と表すことができ、3gの分銅 x 個と2018gの分銅 y 個を皿Bにのせることで M の値を量ることができる」となるわけだから、4035以下の整数で条件を満たすものをチェックすれば良いね。

……, 4030, 4031, 4032, 4033, 4034, 4035 これらで大きい方からチェックすると

4035の各位の数字を足すと12となるから、この数は3で割り切れ、 $3x+2018y$ を満たす x, y の値が存在するからダメ。4034=2018+2016 この数の2016の各位の数字を足すと9となり、3で割り切れ、 $3x+2018y$ を満たす x, y の値が存在するからダメ。ところが、次の4033は3で割り切れないし、4033=2018+2015としても、2015が3で割り切れないから、 $3x+2018y$ を満たす x, y の値は存在しません。（勿論、 x, y は0以上の整数ですよ。）つまり、**ツテトナ**

に入る数は **4033** って訳です。なかなか難しかったね。やれやれ。