

円のベクトル方程式（応用編）

点Pが動点で、点Cが定点を表すとき、中心がC、半径が r （ $r>0$ ）の円の方程式は $|\overrightarrow{CP}|=r$ で表すことが出来ます。この式は定点Cから動点Pまでの距離が常に r であることを表しています。ところで、この式の始点をOに変えると $|\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OC}|=r$ と変形されますが、これは円の方程式が

$|(動点を表す位置ベクトル)-(定点を表す位置ベクトル)|=(正の定数)$ の形で表されることを示しています。

このことと、内積の計算法則を利用した入試問題がしばしば出題されますが、教科書で余り取り上げてないせいか、苦手意識を持つ人が多いようです。今回は、それについて学びます。

2015年のセンター試験で同様な問題が出題されているので、それを利用して考えてみましょう。

問題 平面上の $\triangle OAB$ において、 $|\overrightarrow{OA}|=2$ 、 $|\overrightarrow{OB}|=3$ 、 $\angle AOB=60^\circ$ とし、点Pは $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ を満たしながら

動く。 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \boxed{\text{ア}}$ に注意すると $|\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{\boxed{\text{イ}}}{\boxed{\text{ウ}}} = 0$ となる。

点Mを $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{\boxed{\text{エ}}}$ となるように定めると、点Pは、Mを中心とする半径 $\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$ の円周上を動く。

解答 $|\overrightarrow{OA}|=2$ 、 $|\overrightarrow{OB}|=3$ 、 $\angle AOB=60^\circ$ より、 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 2 \times 3 \times \cos 60^\circ = 3$ このとき、 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = \frac{5}{4}$ より

$(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OP}) = \frac{5}{4}$ 左辺を展開し、 $|\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{5}{4}$ これに $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 3$ を

代入し整理すると、 $|\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \frac{7}{4} = 0$ となる。再度、これを変形し

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} = -\frac{7}{4} \quad \text{両辺に } \left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 \text{ を足して}$$

$$|\overrightarrow{OP}|^2 - (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) \cdot \overrightarrow{OP} + \left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 = -\frac{7}{4} + \left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2$$

$$\left| \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 = -\frac{7}{4} + \left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 \dots \textcircled{1}$$

$$\left| \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 = \frac{1}{4} \{ |\overrightarrow{OA}|^2 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + |\overrightarrow{OB}|^2 \} = \frac{1}{4} (4 + 6 + 9) = \frac{19}{4} \quad \text{これを}\textcircled{1}\text{式の右辺に代入し}$$

$$\left| \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right|^2 = 3 \quad \left| \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right| \geq 0 \text{ より、} \left| \overrightarrow{OP} - \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} \right| = \sqrt{3} \dots \textcircled{2}$$

ここで $\frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2} = \overrightarrow{OM}$ とすると、 $\textcircled{2}$ 式より $|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM}| = \sqrt{3}$ つまり $|\overrightarrow{MP}| = \sqrt{3}$ となり、点PはMを

中心とする半径 $\sqrt{3}$ の円を描くと言える。