（入試演習）　速度と速さ・面積

問題　Oを原点とする座標平面上において，点Pは点Oを中心とする半径2の円周上を反時計回りに動き，点Qは点Pを中心とする半径1の円周上を反時計回りに動く。時刻 $t=0$ のとき，点Pは $(2,\ 0)$ にあり，点Qは $(3,\ 0)$ にある。時刻 t のとき，線分OPは，x 軸の正の部分を始線とした角 t の動径とする。また，時刻 t のとき，線分PQは，点Pを始点とし動径OPを延長した半直線を始線とした角 t の動径とする。ただし，$0 \leqq t \leqq \pi$ とする。

(1)　時刻 t における点Qの座標は $\left({}^{ア}\boxed{\ \ },\ {}^{イ}\boxed{\ \ }\right)$ である。

(2)　時刻 $t=\dfrac{\pi}{2}$ における点Qの速度ベクトルは $\left({}^{ウ}\boxed{\ \ },\ {}^{エ}\boxed{\ \ }\right)$，速さは ${}^{オ}\boxed{\ \ }$ である。

(3)　点Qの x 座標は，$t={}^{カ}\boxed{\ \ }$ のとき最小値 ${}^{キ}\boxed{\ \ }$ となる。

(4)　点Qの y 座標の最大値は ${}^{ク}\boxed{\ \ }$ である。

(5)　点Qの軌跡と x 軸で囲まれた図形の面積は ${}^{ケ}\boxed{\ \ }$ である。

解答　(1)　点Pは点Oを中心とする半径2の円周上にあり，線分OPと x 軸の正の部分のなす角は t であるから

$$\overrightarrow{OP}=(2\cos t,\ 2\sin t)$$

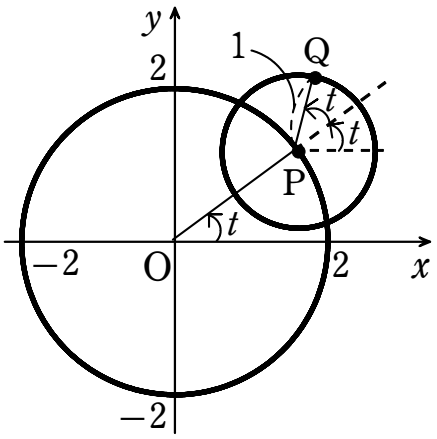
また，点Qは点Pを中心とする半径1の円周上にある。

右の図から線分PQと x 軸の正の部分のなす角は $2t$ であるから　$\overrightarrow{PQ}=(\cos 2t,\ \sin 2t)$

よって　$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}$

$$=(2\cos t+\cos 2t,\ 2\sin t+\sin 2t)$$

すなわち　$Q({}^{ア}2\cos t+\cos 2t,\ {}^{イ}2\sin t+\sin 2t)$



(2)　$Q(x,\ y)$ とすると，(1)から　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t-2\sin 2t$

$$\frac{dy}{dt}=2\cos t+2\cos 2t$$

$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\dfrac{dx}{dt}=-2$，$\dfrac{dy}{dt}=-2$ であるから，求める点Qの速度ベクトルは　$({}^{ウ}-2,\ {}^{エ}-2)$

また，速さは　$\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}={}^{オ}2\sqrt{2}$

(3)　(2)から　$\dfrac{dx}{dt}=-2\sin t-2\cdot 2\sin t\cos t$

$$=-2\sin t(1+2\cos t)$$

$0<t<\pi$ において $\dfrac{dx}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{2}{3}\pi$

よって，点Qの x 座標の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{2}{3}\pi$	…	π
$\frac{dx}{dt}$	／	−	0	+	＼
x	3	↘	極小	↗	−1

したがって，点Qの x 座標は $t={}^{カ}\dfrac{2}{3}\pi$ で極小かつ最小となり，

その最小値は　$2\cos\dfrac{2}{3}\pi+\cos\dfrac{4}{3}\pi={}^{キ}-\dfrac{3}{2}$

(4) (2) から　$\dfrac{dy}{dt}=2\cos t+2(2\cos^2 t-1)$

$=2(\cos t+1)(2\cos t-1)$

$0<t<\pi$ において $\dfrac{dy}{dt}=0$ とすると　$t=\dfrac{\pi}{3}$

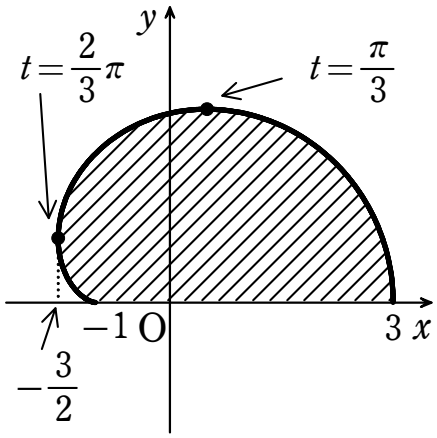
よって，点Qの y 座標の増減表は右のようになる。

t	0	…	$\frac{\pi}{3}$	…	π
$\frac{dy}{dt}$	／	＋	0	−	＼
y	0	↗	極大	↘	0

したがって，点Qの y 座標は $t=\dfrac{\pi}{3}$ で極大かつ

最大となり，その最大値は　$2\sin\dfrac{\pi}{3}+\sin\dfrac{2}{3}\pi=$ ク $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

(5) (3), (4) から，点Qの軌跡は右の図のようになり，求める面積は斜線部分の面積である。



点Qの軌跡のうち，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の部分の y 座標を y_1，

$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ の部分の y 座標を y_2 とし，求める面積を S とすると

$$S=\int_{-\frac{3}{2}}^{3}y_1dx-\int_{-\frac{3}{2}}^{-1}y_2dx$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}y_1\frac{dx}{dt}dt-\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}y_2\frac{dx}{dt}dt$$

$$=\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}(2\sin t+\sin 2t)(-2\sin t-2\sin 2t)dt+\int_{\pi}^{\frac{2}{3}\pi}(2\sin t+\sin 2t)(-2\sin t-2\sin 2t)dt$$

$$=\int_{\pi}^{0}(2\sin t+\sin 2t)(-2\sin t-2\sin 2t)dt$$

$$=2\int_{0}^{\pi}(2\sin^2 t+3\sin t\sin 2t+\sin^2 2t)dt$$

ここで　$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin t\sin 2t\,dt=\int_0^{\pi}2\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{\pi}2\sin^2 t(\sin t)'dt=\left[\frac{2}{3}\sin^3 t\right]_0^{\pi}=0$

$\displaystyle\int_0^{\pi}\sin^2 2t\,dt=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\left[\frac{1}{2}t-\frac{1}{8}\sin 4t\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$

よって　$S=2\left(2\cdot\dfrac{\pi}{2}+3\cdot 0+\dfrac{\pi}{2}\right)=$ ケ 3π