

(入試演習)

式の割り算 (解答編)

問題 整式 $P(x)$ がある。 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの商は $Q(x)$ であり、余りは $-5x-6$ である。また、 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $-x+2$ である。

(1) $P(1)$ の値を求めよ。また、 $P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ったときの余りを $ax+b$ (a, b は定数) とするとき、 a, b の値を求めよ。

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+1)^2$ で割ったときの余りを cx^2+dx+e (c, d, e は定数) とするとき、 c, d, e の値をもとめよ。

(3) $P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)^2$ で割ったときの余りを求めよ。

解答 (1) 仮定より $P(x)=(x-1)^2Q(x)-5x-6$ とおくと、 $P(1)=-5-6=-11$

$P(x)$ を $(x-1)(x+1)$ で割ったときの余りが $ax+b$ (a, b は定数) だから、商を $Q_1(x)$ とおくと

$P(x)=(x-1)(x+1)Q_1(x)+ax+b$ と表せる。ところで $P(1)=-11$ より $a+b=-11 \dots \textcircled{1}$

また、 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ると余りが $-x+2$ だから $P(-1)=3$ より $-a+b=3 \dots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を連立して解くと $(a, b)=(-7, -4)$

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x+1)^2$ で割ったときの商を $Q_2(x)$ とすると、余りが cx^2+dx+e (c, d, e は定数) であるから、
 $P(x)=(x-1)(x+1)^2Q_2(x)+cx^2+dx+e$ と表せる。ところで、 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余り $-x+2$ は、一体、どこから出てきたのだろうか。 $(x-1)(x+1)^2Q_2(x)$ は $(x+1)^2$ で割り切れるので、ここから余りは出ない。実は余りの $-x+2$ は cx^2+dx+e を $(x+1)^2$ で割って出てきたのである。

cx^2+dx+e を $(x+1)^2$ で割ると商は c だから、 $cx^2+dx+e=c(x+1)^2-x+2$ と表せることになり、

$P(x)=(x-1)(x+1)^2Q_2(x)+c(x+1)^2-x+2$ と表せる。ところで $P(1)=-11$ だから

$P(1)=4c-1+2=-11$ より $c=-3$ となる。よって $cx^2+dx+e=-3(x+1)^2-x+2=-3x^2-7x-1$ より $(c, d, e)=(-3, -7, -1)$ となることが分かる。

(3) これも(2)と同じように考えると解くことが出来る。 $P(x)$ を $(x-1)^2(x+1)^2$ で割ったときの余りは高くても3次だから $P(x)=(x-1)^2(x+1)^2Q_3(x)+fx^3+gx^2+hx+i$ (f, g, h, i は定数) と表せる。

ところで、 $P(x)$ を $(x-1)(x+1)^2$ で割ったときの余り $-3x^2-7x-1$ は、一体、どこから出てきたのだろうか。

$(x-1)^2(x+1)^2Q_3(x)$ は $(x-1)(x+1)^2$ で割り切れるので、そこからではなく、 fx^3+gx^2+hx+i を割って出てきたのである。 fx^3+gx^2+hx+i を $(x-1)(x+1)^2$ で割ったときの商は f だから

$fx^3+gx^2+hx+i=f(x-1)(x+1)^2-3x^2-7x-1$ と表せることになる。右辺を展開して整理すると、

$fx^3+gx^2+hx+i=fx^3+(f-3)x^2-(f+7)x-(f+1)$ これは x についての恒等式だから、

$g=f-3 \dots \textcircled{1}$, $h=-f-7 \dots \textcircled{2}$, $i=-f-1 \dots \textcircled{3}$

ところで、 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったときの余りは $-5x-6$ であることについて、 $(x-1)^2(x+1)^2Q_3(x)$ は $(x-1)^2$ で割り切れるので、 $fx^3+(f-3)x^2-(f+7)x-(f+1)$ を $(x-1)^2$ で割ると、商が $fx+(3f-3)$ 、余りが

$(4f-13)x-4f+2$ となる。つまり $4f-13=-5$, $-4f+2=-6$ これら2式を満たす f の値は $f=2$ となる。 $\textcircled{1}$,

$\textcircled{2}, \textcircled{3}$ より、 $g=-1$, $h=-9$, $i=-3$ となり、求める余りは $2x^3-x^2-9x-3$ となる。