

例題 $0.4\dot{2}3\dot{1}$ を無限等比級数の考え方を利用し、分数で表しなさい。

解答 $0.4\dot{2}3\dot{1} = 0.4 + 0.0231 + 0.0000231 + 0.0000000231 + \dots$

上の式で、 $0.0231 + 0.0000231 + 0.0000000231 + \dots$ の部分は、初項が 0.0231 , 公比 $\frac{1}{1000}$ の無限等比級数である。

$$\begin{aligned} |\text{公比}| < 1 \text{ であるから、勿論、収束し、} 0.0231 + 0.0000231 + 0.0000000231 + \dots &= \frac{0.0231}{1 - \frac{1}{1000}} \\ &= \frac{231}{10000 - 10} = \frac{231}{9990} = \frac{77}{3330} \end{aligned}$$

これに 0.4 、つまり $\frac{4}{10}$ を加え、 $0.4\dot{2}3\dot{1} = \frac{4}{10} + \frac{77}{3330} = \frac{1332 + 77}{3330} = \frac{1409}{3330}$ となる。

補足 循環小数を分数に直す問題は、実は中学でも習っています。そのとき習ったやり方を使って、上の問題を解きなさい。

解答 $x = 0.4\dot{2}3\dot{1} \dots$ ① とおいて、両辺を1000倍すると、 $1000x = 423.1\dot{2}3\dot{1} \dots$ ②

$$\begin{array}{rcll} \text{②} - \text{①より} & 1000x = 423.1\dot{2}3\dot{1} & \text{両辺を10倍し} & 9990x = 4227 \\ & - \quad x = 0.4\dot{2}3\dot{1} & & \therefore x = \frac{4227}{9990} = \frac{1409}{3330} \\ \hline & 999x = 422.7 & & \end{array}$$

問題 $0.\dot{6}2\dot{9} \div 0.7\dot{3}$ の計算結果を分数で表し、更に循環小数で表しなさい。但し、無限等比級数の考え方を使って解くこと。

解答 $0.\dot{6}2\dot{9} = 0.629 + 0.000629 + 0.000000629 + \dots = \frac{0.629}{1 - \frac{1}{1000}} = \frac{629}{1000 - 1} = \frac{629}{999} = \frac{37 \times 17}{37 \times 27} = \frac{17}{27}$

$$\begin{aligned} \text{また、} 0.7\dot{3} &= 0.7 + 0.03 + 0.003 + 0.0003 + \dots = \frac{7}{10} + \frac{0.03}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{7}{10} + \frac{3}{100 - 10} = \frac{7}{10} + \frac{3}{90} \\ &= \frac{21}{30} + \frac{1}{30} = \frac{22}{30} = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

$$\text{よって、} 0.\dot{6}2\dot{9} \div 0.7\dot{3} = \frac{17}{27} \div \frac{11}{15} = \frac{17}{27} \times \frac{15}{11} = \frac{17 \times 5}{9 \times 11} = \frac{85}{99} = 0.\dot{8}\dot{5}$$