

問題 原点 O , $A(a, 0)$, $B(b, c)$ を頂点とする三角形 OAB がある。ただし, $a > 0$ とする。辺 OA を n 等分する点を, x 座標が小さい順に $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}$ とし, 点 P_n を点 A とする。

(1) $1 \leq k \leq n$ として, 点 P_k の座標を求めよ。

(2) $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{BP_k}|^2$ とする。 S_n を n を用いて表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。

解答 (1) $\overrightarrow{OP_k} = \frac{k}{n} \overrightarrow{OA}$ であるから, 点 P_k の座標は $P_k\left(\frac{ka}{n}, 0\right)$

(2) $\overrightarrow{BP_k} = \overrightarrow{OP_k} - \overrightarrow{OB} = \left(\frac{ka}{n} - b, -c\right)$ であるから

$$|\overrightarrow{BP_k}|^2 = \left(\frac{ka}{n} - b\right)^2 + (-c)^2 = \frac{a^2}{n^2} k^2 - \frac{2ab}{n} k + b^2 + c^2$$

$$\begin{aligned} \text{よって } S_n &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n |\overrightarrow{BP_k}|^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{a^2}{n^2} k^2 - \frac{2ab}{n} k + b^2 + c^2 \right) \\ &= \frac{1}{n} \left\{ \frac{a^2}{n^2} \cdot \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1) - \frac{2ab}{n} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + (b^2 + c^2)n \right\} \\ &= \frac{a^2}{6n^2} (n+1)(2n+1) - \frac{ab}{n} (n+1) + b^2 + c^2 \\ &= \frac{a^2}{6n^2} + \frac{a(a-2b)}{2n} + \frac{a^2}{3} - ab + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} &= 0 \text{ から } \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{a^2}{6n^2} - \frac{a(a-2b)}{2n} + \frac{a^2}{3} - ab + b^2 + c^2 \right\} \\ &= \frac{a^2}{3} - ab + b^2 + c^2 \end{aligned}$$