

法線ベクトルと2直線のなす鋭角

直線のベクトル方程式には、方向ベクトルを使うものと法線ベクトルを使うものがありますが、今回は法線ベクトルを使う直線のベクトル方程式と、法線ベクトルを使って2直線のなす角を求める方法について学びます。まず、法線ベクトルを使った直線のベクトル方程式について復習しましょう。

例題 定点 $A(x_0, y_0)$ を通り、 $\vec{n}=(a, b)$ に垂直な直線をベクトル方程式を使って求めなさい。

解答

求める直線上の任意の点を $P(x, y)$ とすると、

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AP} = 0 \dots \textcircled{1} \text{ が成り立つ。}$$

$$\vec{n} = (a, b) \quad \text{かつ}$$

$$\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = (x, y) - (x_0, y_0) = (x - x_0, y - y_0) \quad \text{だから}$$

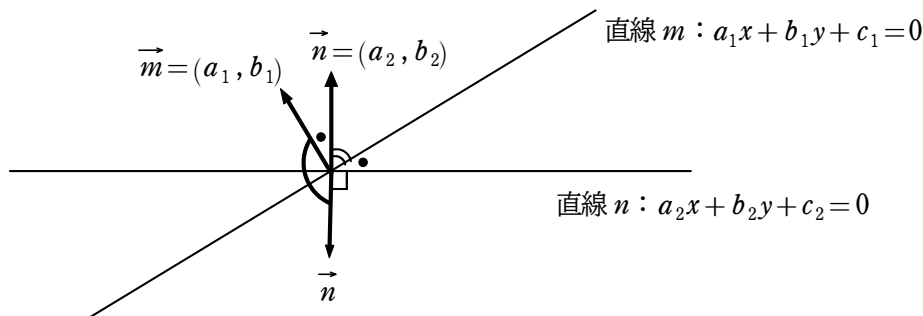
$$\textcircled{1} \text{より} \quad a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0 \quad \text{つまり}$$

$$ax + by - (ax_0 + by_0) = 0 \quad \text{となり}$$

ここで $-(ax_0 + by_0) = c$ とおくと、求める直線の方程式は

$$ax + by + c = 0 \quad \text{となる。}$$

さて、上記の説明を元に考えると、直線の方程式 $ax + by + c = 0$ について、 x の係数と y の係数を成分としたベクトル (a, b) は、その直線に垂直なベクトル、つまり法線ベクトルであると言えます。このことを利用すると、2直線のなす角を、それらの法線ベクトルを利用して求めることが出来ます。まず、それがどうしてなのかを図で説明することにしましょう。



上図において、直線 $m: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ の法線ベクトルを $\vec{m} = (a_1, b_1)$ とし、直線 $n: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ の法線ベクトルを $\vec{n} = (a_2, b_2)$ とすると、2つの法線ベクトル $\vec{m}$ と $\vec{n}$ のなす角は、2直線 m, n のなす鋭角（●印で表された角）と等しいか、あるいは2直線のなす鋭角と足して 180° になる鈍角と等しいことが分かります。つまり、もし、2つの法線ベクトルのなす角が鋭角であれば、それは2直線のなす鋭角と言えますし、もし、2つの法線ベクトルのなす角が鈍角であれば、その鈍角を 180° から引けば、2直線のなす鋭角となると言えます。

次に、これを具体的な問題を使って練習して見ましょう。

問題 2直線 $x + 2y - 1 = 0$ と $x - 3y + 5 = 0$ のなす鋭角 α を求めなさい。

解答 2つの直線の法線ベクトルをそれぞれ $\vec{m} = (1, 2)$, $\vec{n} = (1, -3)$ 、そのなす角を θ ($0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$) とすると、

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| |\vec{n}| \cos \theta \quad \text{より、} \quad 1 - 6 = \sqrt{1+4} \times \sqrt{1+9} \times \cos \theta \quad \text{つまり} \quad \cos \theta = -\frac{5}{5\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{となる。これを}$$

を $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ で解くと、 $\theta = 135^\circ$ となる。よって、2直線のなす鋭角 $\alpha = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$ となる。