様々な因数分解 ④

数式の中には特別な形をしたものがあります。今回は、そんな特別な形をした数式の因数分解について学びます。

例題 次の式を因数分解しなさい。

(1) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

(2) $(a+b)(b+c)(c+a)+abc$

解説 (1)の式は「交代式」と言い、(2) の式を「対称式」と言います。２つの式は共に使われている文字は皆対等、あるいは平等に扱われていると言えます。(2) については、 $a+b$ の a と b のように文字の使い方の符号まで一致している（つまり「対称的」である）ものの、(1) では式全体としては a , b , c は対等ですが、細部を見ると $a-b$ のように符号の使い方に違いがあります。では、どうして (1) の式を交代式というのでしょうか。その理由は $a\to b$, $b\to c$, $c\to a$ のように使う文字を交代して $b^2(c-a)+c^2(a-b)+a^2(b-c)$ としても、式全体としては全く変化がないことに名前の由来があります。

解答

(1) a , b , c は全て同次数だから、 a について整理する。

$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=(b-c)a^2+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=(b-c)a^2-(b^2-c^2)a+(b^2c-bc^2)$

$=(b-c)a^2-(b-c)(b+c)a+bc(b-c)$ $\leftarrow$ b^2-c^2 や b^2c-bc^2 は因数分解しておく。

$=(b-c)\{a^2-(b+c)a+bc\}$ $\leftarrow$ $(b-c)$ が共通因数だから $(b-c)$ でくくる。

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$ $\leftarrow$ $(a-c)$ を $-(c-a)$ とし、 a , b, c の文字が循環するようにする。

(2) (1)と同じく、 a , b , c は全て同次数だから、 a について整理する。

$(a+b)(b+c)(c+a)+abc=(b+c)\{(a+b)(a+c)\}+abc$

$=(b+c)\{a^2+(b+c)a+bc\}+abc$ $\leftarrow$ $(b+c)$ は定数扱いだから、そのままにしておくことがポイント。

$=(b+c)a^2+(b+c)^2a+bc(b+c)+abc$

$=(b+c)a^2+\{(b+c)^2+bc\}a+bc(b+c)$ $\leftarrow$ これでやっと a について整理できた。

$=\{(b+c)a+bc\}\{a+(b+c)\}$ $\leftarrow$ b , c を定数扱いし、たすき掛けしていることが分かるかな？

$=(ab+bc+ca)(a+b+c)$ $\leftarrow$ 後は見やすく整理している。

$(b+c)$ $\quad bc$

1 $\quad (b+c)$ $\leftarrow$ たすき掛けして加えると a の係数 $(b+c)^2+bc$ になる。

※ 上の解き方は、特に「交代式」や「対称式」の性質を使った解き方をしている訳ではなく、原則的な解き方で解いています。「交代式」と「対称式」については、その使い方について後でまた詳しく学びますが、今は名前だけでも覚えておいて下さい。