

(共通テスト対策 22)

問題 a を実数とする。座標平面上で、点 $(3, 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とし、
直線 $y = ax$ を ℓ とする。

(1) 円 C の方程式は $x^2 + y^2 - \boxed{\text{ア}}x - \boxed{\text{イ}}y + \boxed{\text{ウ}} = 0$ である。

(2) 円 C と直線 ℓ が接するのは $a = \boxed{\text{エ}}$, $\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のときである。

$a = \frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}$ のとき、 C と ℓ の接点を通り、 ℓ に垂直な直線の方程式は $y = \frac{\boxed{\text{キク}}}{\boxed{\text{ケ}}}x + \boxed{\text{コ}}$ である。

ただし、 $\boxed{\text{キク}}$, $\boxed{\text{ケ}}$, $\boxed{\text{コ}}$ は、文字 a を用いない形で答えること。

(3) 円 C と直線 ℓ が異なる 2 点 A, B で交わる時、二つの交点を結ぶ線分 AB の長さ

は $\boxed{\text{サ}} \sqrt{\frac{\boxed{\text{シ}}a - \boxed{\text{ス}}a^2}{a^2 + 1}}$ である。また、 AB の長さが 2 となるのは $a = \frac{\boxed{\text{セ}}}{\boxed{\text{ソ}}}$ のときである。

問題 (1) 円 C は中心の座標が $(3, 1)$ 、半径が 1 であるから、その方程式は

$$(x-3)^2 + (y-1)^2 = 1^2 \quad \text{よって} \quad x^2 + y^2 - \text{ア}6x - \text{イ}2y + \text{ウ}9 = 0$$

(2) 円 C の中心 $C(3, 1)$ から直線 ℓ に引いた垂線と直線 ℓ の交点を H とすると、円 C と直線 ℓ が接するための条件は $CH = (\text{円 } C \text{ の半径}) = 1$

$$CH = \frac{|a \cdot 3 - 1|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} \text{ であるから } |3a - 1| = \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{両辺は負でないから 2 乗して} \quad (3a - 1)^2 = a^2 + 1$$

$$\text{展開して整理すると} \quad 8a^2 - 6a = 0 \quad \text{すなわち} \quad a(4a - 3) = 0$$

$$\text{これを解いて} \quad a = \text{オ}0, \text{カ}\frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{4} \text{ のとき、すなわち、直線 } \ell \text{ の傾きが } \frac{3}{4} \text{ のとき、直線 } \ell \text{ に垂直な直線の傾きは } -\frac{4}{3}$$

円 C と直線 ℓ の接点を通り、直線 ℓ に垂直な直線は円 C の中心 $C(3, 1)$ を通るから、求める直

$$\text{線の方程式は} \quad y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 3) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\text{キク}-4}{\text{ケ}3}x + \text{コ}5$$

(3) 円 C と直線 ℓ が異なる 2 点で交わるための条件は $CH < 1$

$$\text{よって、(2) から} \quad |3a - 1| < \sqrt{a^2 + 1}$$

$$\text{両辺は負でないから 2 乗して整理すると} \quad 8a^2 - 6a < 0$$

$$\text{すなわち} \quad a(4a - 3) < 0 \quad \text{これを解いて} \quad 0 < a < \frac{3}{4}$$

このとき、線分 AB の長さは $2AH$ に等しいから、三平方の定理により

$$AB = 2\sqrt{1^2 - CH^2} = 2\sqrt{1 - \frac{(3a-1)^2}{a^2+1}} = \text{サ}2\sqrt{\frac{\text{シ}6a - \text{ス}8a^2}{a^2+1}}$$

$$\text{また、線分 } AB \text{ の長さが 2 となるのは、} \sqrt{\frac{6a - 8a^2}{a^2+1}} = 1 \text{ のとき、すなわち、}$$

$\sqrt{6a-8a^2}=\sqrt{a^2+1}$ のときである。

両辺を2乗して整理すると $9a^2-6a+1=0$

すなわち $(3a-1)^2=0$ これを解いて $a=\frac{\text{セ}1}{\text{ッ}3}$ これは、 $0<a<\frac{3}{4}$ を満たす。