

(2次対策：2021年①)

【問題】 複素数平面上の5点 $O(0)$, $A(\alpha)$, $B(\beta)$, $C(r)$, $D(2-\sqrt{3}i)$ は $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2-\sqrt{3}i}{r} = \frac{\overline{\alpha}}{2+\sqrt{3}i}$ を満たしている。

ただし, $|\alpha| = \sqrt{3}$ であり, 3点 O , A , D は一直線上にない。

(1) 3点 O , B , D は一直線上にあることを示せ。

(2) $\frac{CD}{AB}$ の値を求めよ。

(3) $\angle AOB = 90^\circ$ のとき, $\frac{\alpha}{2-\sqrt{3}i}$ の実部を求めよ。

【解答】 (1) $\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{2+\sqrt{3}i}$ より $\beta = \frac{|\alpha|^2}{2+\sqrt{3}i}$

$$|\alpha|^2 = 3 \text{ であるから } \beta = \frac{3}{2+\sqrt{3}i} = \frac{3}{7}(2-\sqrt{3}i)$$

$2-\sqrt{3}i$ は点 D を表す複素数であるから, 3点 O , B , D は一直線上にある。

$$(2) \frac{CD}{AB} = \frac{|(2-\sqrt{3}i)-r|}{|\beta-\alpha|} = \frac{\left| \frac{2-\sqrt{3}i}{r} - 1 \right| |r|}{\left| \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right| |\alpha|}$$

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{2-\sqrt{3}i}{r} \text{ より } \left| \frac{\beta}{\alpha} - 1 \right| = \left| \frac{2-\sqrt{3}i}{r} - 1 \right|$$

$$\text{よって } \frac{CD}{AB} = \frac{|r|}{|\alpha|}$$

$$\text{また, } \frac{\beta}{\alpha} = \frac{2-\sqrt{3}i}{r} \text{ より } \frac{r}{\alpha} = \frac{2-\sqrt{3}i}{\beta}$$

$$(1) \text{ より, } \beta = \frac{3}{7}(2-\sqrt{3}i) \text{ であるから } \frac{r}{\alpha} = \frac{2-\sqrt{3}i}{\frac{3}{7}(2-\sqrt{3}i)} = \frac{7}{3}$$

$$\text{したがって } \frac{CD}{AB} = \frac{7}{3}$$

(3) $\angle AOB = 90^\circ$ のとき, $\frac{\beta}{\alpha}$ は純虚数である。

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\overline{\alpha}}{2+\sqrt{3}i} = \overline{\left(\frac{\alpha}{2-\sqrt{3}i} \right)} \text{ であるから, } \left(\frac{\alpha}{2-\sqrt{3}i} \right) \text{ は純虚数である。}$$

よって, $\frac{\alpha}{2-\sqrt{3}i}$ も純虚数である。

したがって, $\frac{\alpha}{2-\sqrt{3}i}$ の実部は 0