

定積分で表された関数

今回は定積分で表された関数について学びます。数Ⅱの積分の公式で $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ という重要公式があります。残念ながら、この公式の真の意味を理解している高校生の皆さんは余り多くはないようです。もし、あなた自身、余りよく分かっていなかったとしたら、今から詳しく説明しますから、是非、完全に理解出来るように努めて下さい。まずこの公式を学ぶにあたって、 $\frac{dy}{dx}$ の意味を確認しましょう。これは「 y を x で微分する」という意味ですね。 $\frac{d}{dx} f(x)$ なら、「 $f(x)$ を x で微分する」という意味になります。ですから、 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt$ は、「 $\int_a^x f(t)dt$ を x で微分する」ということを表していることになります。

さて、 $f(t)$ の不定積分の1つを $F(t)$ とすると、 $\int_a^x f(t)dt = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$ となりますから、

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = \frac{d}{dx} \{F(x) - F(a)\} = f(x) \text{ が成り立ちます。}$$

実際のところ、この公式の真意を知るのは、なかなか難しいようです。更に理解を深めるために、もう少し補足してみましょう。 $\int_a^x f(t)dt$ は、 t の関数 $f(t)$ を定数 a から x まで t で積分したものであることを意味しています。

$\int_2^x (t^2 - 3t + 2)dt$ なども、勿論、その仲間だと言えます。 $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt = f(x)$ は、その t の関数 $f(t)$ の定積分

$\int_a^x f(t)dt$ を x で微分すると、 t の関数 $f(t)$ が x の関数 $f(x)$ に変わることを示しています。ですから、

$\int_2^x (t^2 - 3t + 2)dt$ を x で微分すると、 t が x に変わり、 $x^2 - 3x + 2$ に変わることになり

$$\frac{d}{dx} \int_2^x (t^2 - 3t + 2)dt = x^2 - 3x + 2 \text{ となることになります。どうでしょう。分かりますか。}$$

一層の理解を得るために、少し練習問題をやってみることにしましょう。

練習 次の各関数を x で微分しなさい。

$$\textcircled{1} y = \int_{-1}^x (2t^3 + 5t)dt \quad \textcircled{2} y = \int_5^x (-2t^2 + 4t + 5)dt \quad \textcircled{3} y = \int_a^x (5t^4 - 2t^2)dt$$

解答

$$\textcircled{1} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{-1}^x (2t^3 + 5t)dt = 2x^3 + 5x \quad \textcircled{2} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_5^x (-2t^2 + 4t + 5)dt = -2x^2 + 4x + 5$$

$$\textcircled{3} \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \int_a^x (5t^4 - 2t^2)dt = 5x^4 - 2x^2$$

練習 $\int_2^x f(t)dt = x^2 - 3x + a$ において、 a の値と $f(x)$ を求めなさい。

解答 両辺に $x=2$ を代入すると、 $\int_2^2 f(t)dt = 4 - 6 + a$ となります。定積分の定義より $\int_2^2 f(t)dt = 0$ ですから

$0 = a - 2$ より、 $a = 2$ となります。更にこのとき、 $\int_2^x f(t)dt = x^2 - 3x + 2$ の両辺を x で微分し $f(x) = 2x - 3$ となりますね。