

「無理数とは何ですか」と問われたら、どう答えますか。その答えは「循環しない無限小数」ですね。では、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明しなさいと言われたら、どうやって証明したら良いのでしょうか。そのまま循環しない無限小数であることを証明できるでしょうか。たとえ、あなたが $\sqrt{2}$ の値として100万桁の小数を知っていたとしても、その後、永遠に循環しない無限小数であるかどうかは確かめようがありません。つまり、正面からの証明は不可能だということです。背理法という証明方法は、このように正面からの証明が出来ないときに使うとても強力な証明法です。是非、しっかり理解して、習得して欲しいと思います。

では、背理法の証明の方針を説明しましょう。私たちは $\sqrt{2}$ が実数であることは知っています。実数とは大小比較が出来る数のことですね。 $\sqrt{2}$ が1より大きいことは分かりますから、確かに実数だと言えます。ところで、実数には有理数と無理数があります。もし、 $\sqrt{2}$ を有理数だと仮定して論理を展開し、それで不具合が出てきたとしたら、そもそも $\sqrt{2}$ を有理数だと仮定したこと自体が間違っていることになります。つまり、 $\sqrt{2}$ は有理数ではなく無理数であることが言えることになるわけです。背理法というのは、ざっとこのような証明の仕方のことを言います。

では、今から $\sqrt{2}$ が無理数であることを、背理法を使って証明しましょう。

証明 $\sqrt{2}$ が有理数であると仮定し、 $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$ (但し、 m と n は互いに素の整数。 $m \neq 0$) とおきます。

この両辺を2乗すると $2 = \frac{n^2}{m^2}$ となり、分母を払うと $2m^2 = n^2 \dots \textcircled{1}$ となります。 $2m^2$ は偶数ですから、 n^2 も偶数となります。2乗して偶数となる整数は偶数しかありませんから、 n も偶数と言えます。よって $n = 2k$ (k は整数) とおいて $\textcircled{1}$ に代入すると、 $2m^2 = 4k^2$ つまり $m^2 = 2k^2$ となります。 $2k^2$ は偶数ですから m^2 も偶数となり、 m は偶数となります。

ところで、 n は偶数でしたから、 m も偶数となると、最初の仮定である m と n が互いに素であることに反し矛盾します。つまり $\sqrt{2}$ が有理数であるという仮定自体が間違っていることになり、 $\sqrt{2}$ は無理数だと言えたことになります。(証明終わり)

注意 「互いに素」の意味は、「1以外に正の公約数を持たない」ということを意味します。この場合、 $\frac{n}{m}$ が既約分数であるということと同じですね。念のために既約分数の説明をすると、既約分数とは、もうそれ以上約分することの出来ない分数のことです。また、奇数の2乗は奇数であり、偶数の2乗は偶数であることも確認しておきましょう。

類題 ① $\sqrt{5}$ が無理数であることを用い、 $\sqrt{5} - 1$ が無理数であることを証明しなさい。

証明 ① $\sqrt{5} - 1$ が有理数であると仮定し、 $\sqrt{5} - 1 = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素の整数。 $m \neq 0$) とおく。これを変形し、 $\sqrt{5} = \frac{n}{m} + 1$ $\sqrt{5} = \frac{n+m}{m}$ m と $n+m$ は共に整数だから $\frac{n+m}{m}$ は有理数となり、 $\sqrt{5}$ が無理数であることに反し矛盾する。よって、 $\sqrt{5} - 1$ は有理数ではなく、無理数である。

類題 ② $\sqrt{5}$ が無理数であることを用い、 $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ が無理数であることを証明しなさい。

証明 ② **証明** $\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ が有理数であると仮定し、 $\frac{1}{\sqrt{5}+2} = \frac{n}{m}$ (m, n は互いに素の整数。 $m \neq 0$) とおく。こ

$$\text{れを変形し、} \frac{\sqrt{5}-2}{(\sqrt{5}+2)(\sqrt{5}-2)} = \frac{n}{m} \quad \sqrt{5}-2 = \frac{n}{m} \quad \sqrt{5} = \frac{n}{m} + 2 \quad \sqrt{5} = \frac{n+2m}{m}$$

m と $n+2m$ は共に整数だから $\frac{n+2m}{m}$ は有理数となり、 $\sqrt{5}$ が無理数であることに反し矛盾する。よって、

$\frac{1}{\sqrt{5}+2}$ は有理数ではなく、無理数である。