二次試験過去問（極限・その他）解答編

$\boxed{1}$

解答　(1)　略　　(2)　略　　(3)　略

(1)　$f'(x)=3x^2+2>0$ であるから，$f(x)$ は単調に増加する。
また，$f(0)=-2<0$，$f(1)=1>0$ であるから，$0<x<1$ の範囲において $f(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在する。
よって，3 次方程式 $f(x)=0$ は $0<x<1$ の範囲にただ 1 つの解をもつ。
この解が有理数であると仮定すると，互いに素な自然数 p，q を用いて $\dfrac{p}{q}$ と表される。

よって　　$\dfrac{p^3}{q^3}+2\cdot\dfrac{p}{q}-2=0$

両辺に q^2 を掛けて整理すると　　$\dfrac{p^3}{q}=2q^2-2pq$

右辺は整数であるから左辺も整数である。
p と q は互いに素より，p^3 と q も互いに素であるから　　$q=1$
ゆえに，方程式の解は自然数 p となるが，$0<p<1$ を満たす自然数 p は存在しないので，矛盾である。
したがって，$f(x)=0$ の解は無理数である。

(2)　数学的帰納法で証明する。
（ア）　$a_1=0$ と $b_1=1$ は整数であるから，有理数である。
a_k と b_k が有理数であるとすると，与えられた漸化式から，(A)～(C) のいずれにおいても a_{k+1} と b_{k+1} は有理数である。したがって，すべての自然数 n について，a_n と b_n は有理数である。

（イ）　(1) より $0<\alpha<1$ であるから　　$a_1<\alpha<b_1$
$a_k<\alpha<b_k$ であると仮定する。このとき (1) から，$f(a_k)<0$ である。

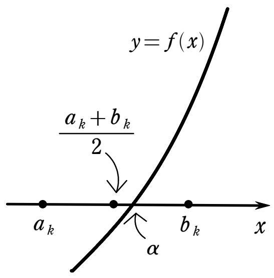
(A) の場合

$f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)<0$ であるから　　$\dfrac{a_k+b_k}{2}<\alpha$

すなわち　　$a_{k+1}=\dfrac{a_k+b_k}{2}<\alpha$

また　　　$b_{k+1}=b_k>\alpha$

よって　　$a_{k+1}<\alpha<b_{k+1}$



(B) の場合

$f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)>0$ であるから　　$\dfrac{a_k+b_k}{2}>\alpha$

すなわち　　$b_{k+1}=\dfrac{a_k+b_k}{2}>\alpha$　　　また　　$a_{k+1}=a_k<\alpha$

よって　　$a_{k+1}<\alpha<b_{k+1}$

(C) の場合

$f\left(\dfrac{a_k+b_k}{2}\right)=0$ となるが，$f(x)=0$ を満たす x は (1) から無理数 α のみであり，

（ア）より $\dfrac{a_k+b_k}{2}$ は有理数であるから，この場合は起こらない。

したがって，$a_{k+1}<\alpha<b_{k+1}$ が成り立ち，すべての自然数 n について，
$a_n<\alpha<b_n$ である。

（ウ）　$b_1-a_1=1$ であるから，$n=1$ のときは成り立つ。

$b_k-a_k=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k-1}$ であると仮定する。

(A) の場合

$$b_{k+1}-a_{k+1}=b_k-\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k-a_k}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(B) の場合

$$b_{k+1}-a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}-a_k=\frac{b_k-a_k}{2}=\left(\frac{1}{2}\right)^k$$

(C) の場合は，（イ）から起こらないことがわかる。

よって，どちらの場合も $b_{k+1}-a_{k+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^k$ が成り立ち，すべての自然数 n について，$b_n-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ である。

(3)　（イ）から　　$0<\alpha-a_n<b_n-a_n$

（ウ）より $b_n-a_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ であるから　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$

よって，はさみうちの原理により　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha-a_n)=0$

ゆえに　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\alpha$　　　これと（ウ）から　　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left\{a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=\alpha$

$\boxed{2}$

解答　(1)　$\dfrac{11}{8}$　　(2)　[略]　　(3)　[略]　　(4)　1

(1)　$a_2=f(a_1)=\dfrac{3}{2}$, $a_3=f(a_2)=\dfrac{11}{8}$

(2)　$f(x_2)-f(x_1)=-\dfrac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-4)$

$x_1<x_2<2$, $x_2+x_1<4$ から　$f(x_2)-f(x_1)>0$
よって　$f(x_1)<f(x_2)$

(3)　[1]　$n=3$ のとき　$a_3=\dfrac{11}{8}<1+\dfrac{2}{3}$ で成り立つ.

[2]　$n=k$ のとき　$a_k<1+\dfrac{2}{k}$ が成り立つと仮定する.

$a_k<1+\dfrac{2}{k}<2$ となり，(2) から

$$a_{k+1}=f(a_k)<f\left(1+\frac{2}{k}\right)=-\frac{1}{2}\left(1+\frac{2}{k}\right)^2+2\left(1+\frac{2}{k}\right)-\frac{1}{2}$$

また　$1+\dfrac{2}{k+1}-\left\{-\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{2}{k}\right)^2+2\left(1+\dfrac{2}{k}\right)-\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{2}{k^2(k+1)}>0$

ゆえに　$a_{k+1}<1+\dfrac{2}{k+1}$

よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.

[1], [2] から，$n=3, 4, \cdots$ に対して $a_n<1+\dfrac{2}{n}$ が成り立つ.

(4)　$a_n>1$ ($n=3, 4, \cdots$) となることを示す.

[1]　$a_3=\dfrac{11}{8}$ で成り立つ.

[2]　$a_k>1$ と仮定すると，(3) から　$1<a_k<2$
(2) から　$f(1)<f(a_k)=a_{k+1}$　　また，$f(1)=1$ から　$a_{k+1}>1$
よって，$n=k+1$ のときも成り立つ.
[1], [2] から，$n=3, 4, \cdots$ に対して　$a_n>1$ が成り立つ.

次に　$1<a_n<1+\dfrac{2}{n}$　　したがって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=1$

$\boxed{3}$

解答　(1)　$P_1=\dfrac{3}{4}$，$P_2=\dfrac{2}{3}$　　(2)　$P_n=\dfrac{(c_n+1)(2{c_n}^2+c_n+6)}{6(n+1)^2}+\dfrac{n-c_n}{n+1}$　　(3)　1

できる 2 次方程式の総数は $(n+1)^2$ 通りである。
2 次方程式 $x^2+2ax+b=0$ の判別式を D とすると実数解をもつための条件は　$D\geqq 0$

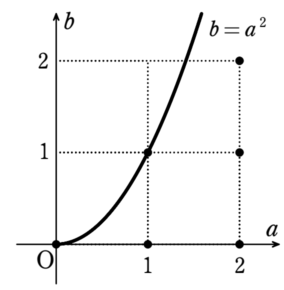
$\dfrac{D}{4}=a^2-b$ であるから　　$a^2-b\geqq 0$　　　すなわち　　$b\leqq a^2$　……①

(1)　$n=1$ のとき，$0\leqq a\leqq 1$，$0\leqq b\leqq 1$ であるから，
① を満たす$(a，b)$ の組は
$(a，b)=(0，0)，(1，0)，(1，1)$

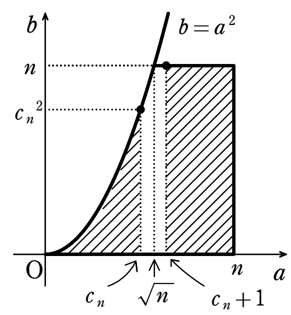
よって　　$P_1=\dfrac{3}{2^2}=\dfrac{3}{4}$

$n=2$ のとき，$0\leqq a\leqq 2$，$0\leqq b\leqq 2$ であるから，
① を満たす $(a，b)$ の組は
$(a，b)=(0，0)，(1，0)，(1，1)，$
$(2，0)，(2，1)，(2，2)$

よって　　$P_2=\dfrac{6}{3^2}=\dfrac{2}{3}$



(2)　c_n は $\sqrt{n}$ を超えない最大の整数であるから，$n\geqq 3$ のとき　$c_n\leqq\sqrt{n}<c_n+1<n$
a を固定して考える。
[1]　$0\leqq a\leqq c_n$ のとき
$0\leqq a\leqq c_n\leqq\sqrt{n}$ より　　$a^2\leqq n$
よって，① を満たす b は，$b=0，1，2，……，a^2$ の (a^2+1) 通りある。
[2]　$c_n+1\leqq a\leqq n$ のとき
$\sqrt{n}<c_n+1\leqq a$ より　　$n<a^2$
よって，$0\leqq b\leqq n$ を満たすすべての整数 b に対して，① は成り立つ。
したがって，① を満たす b は　　$(n+1)$ 通り



[1]，[2] から，① を満たす $(a，b)$ の組の総数は

$$\sum_{a=0}^{c_n}(a^2+1)+\sum_{a=c_n+1}^{n}(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}c_n(c_n+1)(2c_n+1)+(c_n+1)+(n+1)\cdot(n-c_n)$$
$$=\frac{1}{6}(c_n+1)(2{c_n}^2+c_n+6)+(n+1)\cdot(n-c_n)$$

よって　　$P_n=\dfrac{(c_n+1)(2{c_n}^2+c_n+6)}{6(n+1)^2}+\dfrac{n-c_n}{n+1}$

(3)　$c_n\leqq\sqrt{n}<c_n+1$ より　　$\sqrt{n}-1<c_n\leqq\sqrt{n}$

各辺を $\sqrt{n}$ で割って　　$1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\dfrac{c_n}{\sqrt{n}}\leqq 1$

$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$ であるから，はさみうちの原理により　$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{\sqrt{n}}=1$

よって　$\lim_{n\to\infty}\frac{c_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\frac{c_n}{\sqrt{n}}=0$

ゆえに　$\lim_{n\to\infty}\frac{(c_n+1)(2c_n{}^2+c_n+6)}{6(n+1)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{c_n}{n}+\frac{1}{n}\right)\left\{2\left(\frac{c_n}{\sqrt{n}}\right)^2+\frac{c_n}{n}+\frac{6}{n}\right\}}{6\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}$

$$=\frac{0\cdot 2}{6}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-c_n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1-\frac{c_n}{n}}{1+\frac{1}{n}}=\frac{1-0}{1+0}=1$$

したがって　$\lim_{n\to\infty}P_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{(c_n+1)(2c_n{}^2+c_n+6)}{6(n+1)^2}+\frac{n-c_n}{n+1}\right\}=0+1=1$

4

解答　(1)　略　(2)　略　(3)　0

(1)　与えられた漸化式より　$x_{n+1}-x_n=x_n{}^2\geqq 0$

よって　$x_{n+1}\geqq x_n\geqq\cdots\cdots\geqq x_1=a$

$a>0$ であるから，すべての自然数 n に対して　$x_n{}^2\geqq a^2$

$x_{n+1}-x_n=x_n{}^2$ より，$n\geqq 2$ のとき　$x_n=x_1+\sum_{k=1}^{n-1}x_k{}^2\geqq a+\sum_{k=1}^{n-1}a^2=a+(n-1)a^2$

したがって　$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\{a+(n-1)a^2\}=\infty$

すなわち，数列 $\{x_n\}$ は発散する。

(2)　$-1<x_n<0$ ……① とする。

[1]　$n=1$ のとき

$-1<a<0$，$x_1=a$ より，① は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，① が成り立つと仮定すると

$-1<x_k<0$

$n=k+1$ のときを考えると　$x_{k+1}=x_k+x_k{}^2=\left(x_k+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$

よって，$-1<x_k<0$ のとき　$-\frac{1}{4}\leqq x_{k+1}<0$

したがって，$n=k+1$ のときにも ① は成り立つ。

[1]，[2] から，すべての正の整数 n に対して，① は成り立つ。

(3)　(2) より，$-1<a<0$ のとき，すべての正の整数 n に対して $-1<x_n<0$ が成り立つから，$x_{n+1}=x_n+x_n{}^2$ の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n+x_n{}^2}=\frac{1}{x_n(x_n+1)}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}$$

ここで，$0<x_n+1<1$ より $\frac{1}{x_n+1}>1$ であるから　$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n+1}<\frac{1}{x_n}-1$

よって　$\frac{1}{x_n}<\frac{1}{x_{n-1}}-1<\frac{1}{x_{n-2}}-2<\cdots\cdots<\frac{1}{x_1}-(n-1)$

$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{x_1}-(n-1)\right\}=-\infty$ であるから　$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=-\infty$

したがって　$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{1}{x_n}}=0$

5

解答　(1)　(a)　略　(b)　収束，0　(2)　(a)　$a_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{1}{2^n}$　(b)　収束，$\frac{25}{8}$

(1)　(a)　二項定理により

$(1+x)^n={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2+{}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n$　……①

${}_n\mathrm{C}_k>0$，$x>0$ であるから，$n\geqq 3$ のとき　${}_n\mathrm{C}_3x^3+\cdots\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^n>0$

よって，① から　$(1+x)^n>{}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1x+{}_n\mathrm{C}_2x^2$

したがって　$(1+x)^n>1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2$

(b)　(a) から　$(1+x)^n>1+nx+\frac{n(n-1)}{2}x^2>\frac{n(n-1)}{2}x^2>0$

よって　$0<\frac{1}{(1+x)^n}<\frac{2}{n(n-1)x^2}$　すなわち　$0<\frac{n}{(1+x)^n}<\frac{2}{(n-1)x^2}$

ここで　$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{(n-1)x^2}=0$

したがって，はさみうちの原理により，$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+x)^n}$ は収束し，その値は　0

(2)　(a)　$3a_{n+1}=a_n+\frac{1}{2^{n+1}}$ の両辺に 2^{n+1} を掛けると　$3\cdot 2^{n+1}a_{n+1}=2\cdot 2^na_n+1$

$2^na_n=b_n$ とおくと　$3b_{n+1}=2b_n+1$

これを変形すると　$b_{n+1}-1=\frac{2}{3}(b_n-1)$

また　$b_1-1=2a_1-1=1$

よって，数列 $\{b_n-1\}$ は初項 1，公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であるから

$b_n-1=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$　ゆえに　$2^na_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+1$

したがって　$a_n=\frac{1}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{1}{2^n}$

(b)　(a) から　$\sum_{n=1}^{N}na_n=\sum_{n=1}^{N}\left(\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}}+\frac{n}{2^n}\right)$

$S_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2\cdot 3^{n-1}}$，$T_N=\sum_{n=1}^{N}\frac{n}{2^n}$ とおく。

$$S_N=\frac{1}{2}+\frac{2}{2\cdot 3}+\frac{3}{2\cdot 3^2}+\cdots\cdots+\frac{N}{2\cdot 3^{N-1}}$$

両辺に $\frac{1}{3}$ を掛けると

$$\frac{1}{3}S_N=\qquad\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{2}{2\cdot 3^2}+\cdots\cdots+\frac{N-1}{2\cdot 3^{N-1}}+\frac{N}{2\cdot 3^N}$$

辺々を引くと

$$\frac{2}{3}S_N=\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2\cdot 3^{N-1}}-\frac{N}{2\cdot 3^N}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3^N}\right)}{1-\frac{1}{3}}-\frac{N}{2\cdot 3^N}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4\cdot 3^{N-1}}-\frac{N}{2\cdot 3^N}$$

よって　$S_N=\frac{9}{8}-\frac{1}{8\cdot 3^{N-2}}-\frac{3N}{4\cdot 3^N}$

ここで，(1) (b) において $x=2$ とすると

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+2)^n}=0$　すなわち　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3^n}=0$

ゆえに　$\lim_{N\to\infty}S_N=\frac{9}{8}$　……②

また　$T_N=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{N}{2^N}$

両辺に $\frac{1}{2}$ を掛けると

$$\frac{1}{2}T_N=\qquad\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{N-1}{2^N}+\frac{N}{2^{N+1}}$$

辺々を引くと

$$\frac{1}{2}T_N=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^N}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{N}{2^{N+1}}=1-\frac{1}{2^N}-\frac{N}{2^{N+1}}$$

よって　$T_N=2-\frac{1}{2^{N-1}}-\frac{N}{2^N}$

ここで，(1) (b) において $x=1$ とすると

$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(1+1)^n}=0$　すなわち　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$

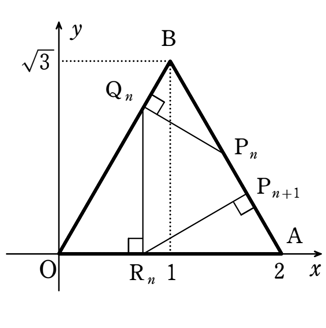
ゆえに　$\lim_{N\to\infty}T_N=2$　……③

よって，②，③ から　$\sum_{n=1}^{\infty}na_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}na_n=\lim_{N\to\infty}(S_N+T_N)=\frac{9}{8}+2=\frac{25}{8}$

したがって，$\sum_{n=1}^{\infty}na_n$ は収束し，その値は　$\frac{25}{8}$

6

解答　$\left(\frac{5}{3},\ \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$



△OAB は 1 辺の長さが 2 の正三角形である。

よって，△$\mathrm{P}_n\mathrm{BQ}_n$，△$\mathrm{Q}_n\mathrm{OR}_n$，△$\mathrm{R}_n\mathrm{AP}_{n+1}$ は相似な直角三角形であり，

$\mathrm{P}_n\mathrm{B}:\mathrm{BQ}_n=\mathrm{Q}_n\mathrm{O}:\mathrm{OR}_n$

$=\mathrm{R}_n\mathrm{A}:\mathrm{AP}_{n+1}=2:1$

が成り立つ。

$\mathrm{AP}_n=a_n$ とすると　$\mathrm{P}_n\mathrm{B}=\mathrm{AB}-\mathrm{AP}_n=2-a_n$

よって　$\mathrm{BQ}_n=\frac{1}{2}\mathrm{P}_n\mathrm{B}=1-\frac{1}{2}a_n$

同様に考えると

$\mathrm{Q}_n\mathrm{O}=2-\mathrm{BQ}_n=1+\frac{1}{2}a_n$，$\mathrm{OR}_n=\frac{1}{2}\mathrm{Q}_n\mathrm{O}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}a_n$，

$\mathrm{R}_n\mathrm{A}=2-\mathrm{OR}_n=\frac{3}{2}-\frac{1}{4}a_n$，$\mathrm{AP}_{n+1}=\frac{1}{2}\mathrm{R}_n\mathrm{A}=\frac{3}{4}-\frac{1}{8}a_n$

したがって　$a_{n+1}=-\frac{1}{8}a_n+\frac{3}{4}$

この漸化式を変形して　$a_{n+1}-\frac{2}{3}=-\frac{1}{8}\left(a_n-\frac{2}{3}\right)$

数列 $\left\{a_n-\dfrac{2}{3}\right\}$ は，初項 $a_1-\dfrac{2}{3}$，公比 $-\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるから

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

よって　$a_n=\left(a_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{8}\right)^{n-1}+\dfrac{2}{3}$

ここで，P_1 は線分 AB 上にあり，A，B とは異なる点であるから　$0<a_1<2$

$\left|-\dfrac{1}{8}\right|<1$ であるから　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3}$

よって，$n\longrightarrow\infty$ のとき，P_n が限りなく近づく点を P とすると

$$\mathrm{AP}=\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{3},\ \mathrm{BP}=2-\mathrm{AP}=\frac{4}{3}$$

したがって，点 P は線分 AB を $1:2$ に内分する点であるから，求める点の座標は

$\left(\dfrac{2\cdot2+1\cdot1}{1+2},\ \dfrac{2\cdot0+1\cdot\sqrt{3}}{1+2}\right)$ から　$\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

7

解答　(1)　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$，$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(2)　$b_n=\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$　　(3)　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{n+1}}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2}{7}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{7}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\frac{2}{7}$

(1)　時刻 $n+1$ に点 P が頂点 A にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ でとどまる。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

よって　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 B にいる場合は，次の 3 通りがある。

[1]　時刻 n に点 A にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ でとどまる。

[3]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ で移動する。

よって　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

時刻 $n+1$ に点 P が頂点 C にいる場合は，次の 2 通りがある。

[1]　時刻 n に点 B にいて，確率 $\dfrac{1}{3}$ で移動する。

[2]　時刻 n に点 C にいて，確率 $\dfrac{1}{2}$ でとどまる。

よって　$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

(2)　$a_n+b_n+c_n=1$ から　$a_n+c_n=1-b_n$

よって，(1) から　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}(a_n+c_n)=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}(1-b_n)=-\dfrac{1}{6}b_n+\dfrac{1}{2}$

この漸化式を変形すると　$b_{n+1}-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{3}{7}\right)$

ここで，時刻 0 に点 P は頂点 A にいるから　$a_0=1$，$b_0=0$，$c_0=0$

よって，数列 $\left\{b_n-\dfrac{3}{7}\right\}$ は，初項 $b_0-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{3}{7}$，公比 $-\dfrac{1}{6}$ の等比数列であるから

$$b_n-\frac{3}{7}=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって　$b_n=\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

注 $n=0$ から考えているため，b_n は $n+1$ 番目の項となる。

(3)　(2) から　$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{3}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$

よって　$p_{n+1}=2^{n+1}a_{n+1}=2^na_n+\dfrac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}=p_n+\dfrac{2}{7}\left\{2^n-\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

$p_0=2^0\cdot a_0=1$ より，$n\geqq1$ のとき

$$p_n=p_0+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{2}{7}\left\{2^k-\left(-\frac{1}{3}\right)^k\right\}=1+\frac{2}{7}\left\{\frac{2^n-1}{2-1}-\frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{2^{n+1}}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\quad\cdots\cdots①$$

$n=0$ のとき　$\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}=1$

$p_0=1$ であるから，① は $n=0$ のときも成り立つ。

よって　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{2^{n+1}}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$

(4)　(3) から　$a_n=\dfrac{p_n}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n+1}}+\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{2}{7}$

(2) から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3}{7}\left\{1-\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{7}$

$c_n=1-a_n-b_n$ から　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}(1-a_n-b_n)=1-\frac{2}{7}-\frac{3}{7}=\frac{2}{7}$

8

解答　(1)　$b_1=\dfrac{1}{2}$，$b_2=\dfrac{1}{6}$　　(2)　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n+\dfrac{1}{3}d_n$，$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n$

(3)　略　　(4)　$b_{n+2}=\dfrac{1}{3}b_{n+1}+\dfrac{2}{3}b_n$　　(5)　$e_n=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

(6)　$b_n=\dfrac{3}{10}+\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{10}$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{5}$

(1)　b_1 は時刻 0 において点 A にいる点 P が，時刻 1 に点 B に移動する確率であるから

$$b_1=\frac{1}{2}$$

b_2 は時刻 0 において点 A にいる点 P が，時刻 1 に点 D，時刻 2 に点 B に移動する確率であるから　$b_2=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

(2)　b_{n+1} は時刻 n において点 P が点 A，C，D のいずれかにいて，時刻 $(n+1)$ に点 B に移動する確率であるから　$b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n+\dfrac{1}{3}d_n$

c_{n+1} は時刻 n において点 P が点 B，D のいずれかにいて，時刻 $(n+1)$ に点 C に移動する確率であるから　$c_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n$

(3)　(2) と同様に考えると　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{3}d_n$，$d_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n$

よって　$a_{n+1}=c_{n+1}$

$a_1=0$，$c_1=0$ であるから　$a_1=c_1$

ゆえに，すべての自然数 n について　$a_n=c_n$

また　$b_{n+1}-d_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{2}c_n+\dfrac{1}{3}d_n\right)-\left(\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{1}{3}b_n+\dfrac{1}{2}c_n\right)=-\dfrac{1}{3}(b_n-d_n)$

(1) より $b_1=\dfrac{1}{2}$ であり，同様に考えると　$d_1=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{b_n-d_n\}$ は初項 $b_1-d_1=0$，公比 $-\dfrac{1}{3}$ の等比数列であるから

$b_n-d_n=0$　　すなわち　$b_n=d_n$

(4)　(2)，(3) から　$b_{n+2}=\dfrac{1}{2}a_{n+1}+\dfrac{1}{2}c_{n+1}+\dfrac{1}{3}d_{n+1}=c_{n+1}+\dfrac{1}{3}b_{n+1}$

$$=\left(\frac{1}{3}b_n+\frac{1}{3}d_n\right)+\frac{1}{3}b_{n+1}=\frac{1}{3}b_{n+1}+\frac{2}{3}b_n$$

よって　$b_{n+2}=\dfrac{1}{3}b_{n+1}+\dfrac{2}{3}b_n$　……①

(5)　① を変形して　$b_{n+2}-b_{n+1}=-\dfrac{2}{3}(b_{n+1}-b_n)$

よって，数列 $\{b_{n+1}-b_n\}$ は初項 $b_2-b_1=-\dfrac{1}{3}$，公比 $-\dfrac{2}{3}$ の等比数列であるから

$$b_{n+1}-b_n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

したがって　$e_n=-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

(6)　(5) より，数列 $\{b_n\}$ の階差数列の第 n 項は $-\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ であるから，$n\geqq2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{1}{3}\left(-\frac{2}{3}\right)^{k-1}=\frac{1}{2}+\frac{-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}{1-\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{3}{10}+\frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

よって　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{3}{10}$

また，(3) から，$n\geqq2$ のとき　$a_n=\dfrac{1}{3}b_{n-1}+\dfrac{1}{3}d_{n-1}=\dfrac{2}{3}b_{n-1}=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{5}$

9

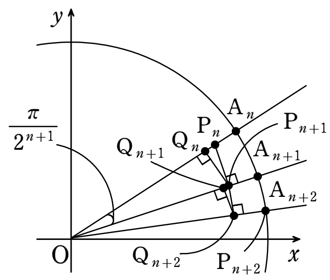
解答　(1)　$\dfrac{1}{2}$　　(2)　$\dfrac{2}{\pi}$

(1)　$\angle A_nOA_{n+1}=\dfrac{\pi}{2^n}-\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

よって　$P_{n+1}Q_n=OP_{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$

$=OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$　……①

また　$OP_{n+1}=OP_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}$



ゆえに　$\dfrac{P_{n+2}Q_{n+1}}{P_{n+1}Q_n}=\dfrac{OP_{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

$=\dfrac{OP_n\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+2}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+2}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}$

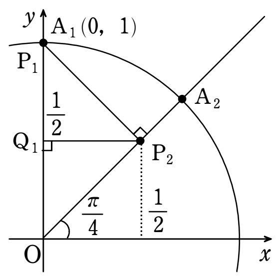
$=\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}}=\dfrac{1}{2}$

(2)　(1) から　$P_{n+2}Q_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n+1}Q_n$

ここで，右の図から　$P_2Q_1=\dfrac{1}{2}$

よって，数列 $\{P_{n+1}Q_n\}$ は 初項 $P_2Q_1=\dfrac{1}{2}$，公比 $\dfrac{1}{2}$ の

等比数列であるから　$P_{n+1}Q_n=\dfrac{1}{2^n}$



ここで，① から　$OP_n\sin\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\cos\dfrac{\pi}{2^{n+1}}=P_{n+1}Q_n$

ゆえに　$OP_n=\dfrac{\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\dfrac{\dfrac{1}{2^{n-1}}}{\sin\dfrac{\pi}{2^n}}$

したがって　$\lim\limits_{n\to\infty}OP_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{\pi}{2^n}}{\dfrac{\pi}{2}\sin\dfrac{\pi}{2^n}}=\dfrac{2}{\pi}$

$\boxed{10}$

解答　(1)　$P_3\left(\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$，$Q_3\left(\dfrac{2a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$，$R_3\left(\dfrac{a+2b}{4},\ \dfrac{c}{2}\right)$

(2)　$\overrightarrow{P_3P_5}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_1P_3}$　　(3)　$\left(\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)(a+b),\ \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)c\right)$

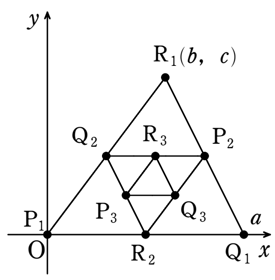
(4)　$\left(\dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{c}{3}\right)$

(1)　$P_2\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$，$Q_2\left(\dfrac{b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$，$R_2\left(\dfrac{a}{2},\ 0\right)$

$P_3\left(\dfrac{\dfrac{b}{2}+\dfrac{a}{2}}{2},\ \dfrac{\dfrac{c}{2}}{2}\right)$ より　$P_3\left(\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$

$Q_3\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{a}{2}}{2},\ \dfrac{\dfrac{c}{2}}{2}\right)$ より　$Q_3\left(\dfrac{2a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$

$R_3\left(\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b}{2}}{2},\ \dfrac{\dfrac{c}{2}+\dfrac{c}{2}}{2}\right)$ より　$R_3\left(\dfrac{a+2b}{4},\ \dfrac{c}{2}\right)$



(2)　(1) より　$\overrightarrow{P_1P_3}=\left(\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)$

(1) と同様にして　$P_4\left(\dfrac{3a+3b}{8},\ \dfrac{3c}{8}\right)$，$Q_4\left(\dfrac{2a+3b}{8},\ \dfrac{3c}{8}\right)$，$R_4\left(\dfrac{3a+2b}{8},\ \dfrac{c}{4}\right)$

$P_5\left(\dfrac{5a+5b}{16},\ \dfrac{5c}{16}\right)$

よって　$\overrightarrow{P_3P_5}=\left(\dfrac{5a+5b}{16}-\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{5c}{16}-\dfrac{c}{4}\right)=\left(\dfrac{a+b}{16},\ \dfrac{c}{16}\right)$

$=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_1P_3}$

(3)　P_{2n+1} は線分 $Q_{2n}R_{2n}$ の中点であるから　$\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n}}+\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n}})$

Q_{2n} は線分 $R_{2n-1}P_{2n-1}$ の中点，R_{2n} は線分 $P_{2n-1}Q_{2n-1}$ の中点であるから

$\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n-1}}$，　$\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n-1}}$

よって　$\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n-1}}+\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n-1}})$

同様にして

$\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+3}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{P_{2n+1}Q_{2n+2}}+\overrightarrow{P_{2n+1}R_{2n+2}})=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{P_{2n+1}R_{2n+1}}+\overrightarrow{P_{2n+1}Q_{2n+1}})$

$=\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n+1}}-\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}+\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n+1}}-\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}})$

$=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n}}+\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n}})+\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n}}+\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n}})\right.$

$\left.-2\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}\right\}$

$=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n}}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n}}+\dfrac{1}{8}\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$

$=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n-1}}+\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n-1}})+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n-1}}$

$+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n-1}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$

$=\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{4}(\overrightarrow{P_{2n-1}Q_{2n-1}}+\overrightarrow{P_{2n-1}R_{2n-1}})-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$

$=\dfrac{3}{4}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$

よって　$\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_{2n-3}P_{2n-1}}=\cdots\cdots=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_3}$

ゆえに　$\overrightarrow{P_1P_{2n+1}}=\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_3P_5}+\cdots\cdots+\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$

$=\overrightarrow{P_1P_3}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_1P_3}+\cdots\cdots+\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\overrightarrow{P_1P_3}=\dfrac{1-\left(\dfrac{1}{4}\right)^n}{1-\dfrac{1}{4}}\overrightarrow{P_1P_3}$

$=\dfrac{4}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)\left(\dfrac{a+b}{4},\ \dfrac{c}{4}\right)=\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)(a+b,\ c)$

すなわち　$(X_{2n+1},\ Y_{2n+1})=\left(\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)(a+b),\ \dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)c\right)$

別解　自然数 m に対し，$P_m(\vec{p_m})$，$Q_m(\vec{q_m})$，$R_m(\vec{r_m})$ とする。

まず，$m\geqq 3$ において　$\vec{p_m}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{p_{m-1}})$　であることを示す。

P_m は線分 $Q_{m-1}R_{m-1}$ の中点であるから　$\vec{p_m}=\dfrac{1}{2}(\vec{q_{m-1}}+\vec{r_{m-1}})$

また，Q_{m-1} は線分 $P_{m-2}R_{m-2}$，R_{m-1} は線分 $P_{m-2}Q_{m-2}$ の中点であるから

$\vec{q_{m-1}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{r_{m-2}})$，$\vec{r_{m-1}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{q_{m-2}})$

よって　$\vec{p_m}=\dfrac{1}{2}\left\{\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{r_{m-2}})+\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{q_{m-2}})\right\}=\dfrac{1}{2}\left\{\vec{p_{m-2}}+\dfrac{1}{2}(\vec{r_{m-2}}+\vec{q_{m-2}})\right\}$

$=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-2}}+\vec{p_{m-1}})$

ゆえに　$\vec{p_m}-\vec{p_{m-2}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{m-1}}-\vec{p_{m-2}})$

$m=2n+3$ とおくと　$\vec{p_{2n+3}}-\vec{p_{2n+1}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{2n+2}}-\vec{p_{2n+1}})$

また　$\vec{p_{2n+2}}-\vec{p_{2n+1}}=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{2n}}+\vec{p_{2n+1}})-\dfrac{1}{2}(\vec{p_{2n-1}}+\vec{p_{2n}})=\dfrac{1}{2}(\vec{p_{2n+1}}-\vec{p_{2n-1}})$

よって　$\vec{p_{2n+3}}-\vec{p_{2n+1}}=\dfrac{1}{4}(\vec{p_{2n+1}}-\vec{p_{2n-1}})$

ゆえに　$\overrightarrow{P_{2n+1}P_{2n+3}}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{P_{2n-1}P_{2n+1}}$　　(以降，本解と同様)

(4)　(3) より　$\lim\limits_{n\to\infty}X_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)(a+b)=\dfrac{a+b}{3}$

$\lim\limits_{n\to\infty}Y_{2n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}\left(1-\dfrac{1}{4^n}\right)c=\dfrac{c}{3}$

よって　$(X,\ Y)=\left(\dfrac{a+b}{3},\ \dfrac{c}{3}\right)$