

## (入試演習)

## 接線と関数の最大最小

**問題**  $x > 0$  で定義された関数  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$  を考える。ただし、 $e$  は自然対数の底とする。

- (1) 曲線  $y = f(x)$  上を動く点  $P$  を考える。点  $P$  における接線の傾きが最小となる点  $P$  の  $x$  座標を求めよ。
- (2) 曲線  $y = f(x)$  上の相異なる 2 点  $Q(q, f(q))$ ,  $R(r, f(r))$  における接線が平行であるとき、 $r$  と  $q$  が満たす等式を求めよ。
- (3)  $q, r$  が (2) で求めた等式と  $r = q + 1$  を満足するとき、 $q$  の値を求めよ。

**解答** (1)  $f(x) = (e^x - 1)^{\frac{1}{2}}$  から  $f'(x) = \frac{1}{2}e^x(e^x - 1)^{-\frac{1}{2}}$

点  $P$  の座標を  $(p, \sqrt{e^p - 1})$  ( $p > 0$ ) とおくと、点  $P$  における曲線  $y = f(x)$  の接線の傾

$$\text{きは } f'(p) = \frac{1}{2}e^p(e^p - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$g(p) = e^p(e^p - 1)^{-\frac{1}{2}} \text{ とおくと}$$

$$g'(p) = e^p(e^p - 1)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}e^{2p}(e^p - 1)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}e^p(e^p - 1)^{-\frac{3}{2}}(e^p - 2)$$

$$p > 0 \text{ において } g'(p) = 0 \text{ とすると } e^p - 2 = 0$$

$$\text{すなわち } p = \log 2$$

よって、 $p > 0$  における  $g(p)$  の増減表は右のようになる。

| $p$     | 0          | ...        | $\log 2$ | ...        |
|---------|------------|------------|----------|------------|
| $g'(p)$ | $\swarrow$ | -          | 0        | +          |
| $g(p)$  | $\swarrow$ | $\searrow$ | 極小       | $\nearrow$ |

ゆえに、 $g(p)$  は  $p = \log 2$  で最小値をとるから、求める点  $P$  の  $x$  座標は  $\log 2$

- (2) 曲線  $y = f(x)$  上の 2 点  $Q, R$  における接線の傾きが等しいとき  $f'(q) = f'(r)$

$$\text{すなわち } \frac{1}{2}e^q(e^q - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}e^r(e^r - 1)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{両辺は正であるから、2 乗して整理すると } (e^{q+r} - e^q - e^r)(e^q - e^r) = 0$$

$$q \neq r \text{ より } e^q \neq e^r \text{ であるから } e^{q+r} - e^q - e^r = 0 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

- (3) ①に  $r = q + 1$  を代入すると  $e^{2q+1} - e^q - e^{q+1} = 0$

$$e^q > 0 \text{ であるから、両辺を } e^q \text{ で割って整理すると } e^q = \frac{e+1}{e}$$

$$\text{よって } q = \log \frac{e+1}{e} = \log(e+1) - 1$$