

早稲田大学過去問①（解答編）

1

$f(x)$ を $f(x)=\left(\log_2\frac{x}{a}\right)\left(\log_2\frac{x}{b}\right)$ (ただし、 $ab=8$, $a>b>0$) とする。 $f(x)$ の最小値が -1 であるとき、 a^2 の値は である。

$\log_2 x=t$ とおくと、 $x>0$ であるとき、 t は実数全体を動く。
このとき $f(x)=(t-\log_2 a)(t-\log_2 b)$

$g(t)=(t-\log_2 a)(t-\log_2 b)$ とおくと
$$g(t)=t^2-(\log_2 a+\log_2 b)t+(\log_2 a)(\log_2 b)$$

ここで、 $ab=8$ であるから
$$\log_2 a+\log_2 b=\log_2 ab=\log_2 8=3 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

よって
$$g(t)=t^2-3t+(\log_2 a)(\log_2 b)$$
$$=\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+(\log_2 a)(\log_2 b)-\frac{9}{4}$$

よって、 $g(t)$ の最小値は
$$g\left(\frac{3}{2}\right)=(\log_2 a)(\log_2 b)-\frac{9}{4}$$

$f(x)$ の最小値が -1 であるとき $(\log_2 a)(\log_2 b)-\frac{9}{4}=-1$

すなわち $(\log_2 a)(\log_2 b)=\frac{5}{4} \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$

①、② から、 $\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ は、 t についての方程式 $t^2-3t+\frac{5}{4}=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$ の 2 解である。

③ を解くと、 $\left(t-\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{5}{2}\right)=0$ より $t=\frac{1}{2}, \frac{5}{2}$

$\log_2 a$ 、 $\log_2 b$ について、底 2 は 1 より大きいから、 $a>b>0$ により
$$\log_2 a>\log_2 b$$

よって
$$\log_2 a=\frac{5}{2}$$

したがって $a^2=\left(2^{\frac{5}{2}}\right)^2=2^5=32$

2

$a_1=a_2=1$ 、 $a_{n+2}=a_n+a_{n+1}$ ($n=1, 2, 3, \cdots$) とする。 i を虚数単位とする。 $\sum_{n=1}^{2019} i^{a_n}$ の値を求めよ。

$i^2=-1$ であるから、 $i^4=1$ である。

$a_n=4q_n+r_n$ (q_n は 0 以上の整数) とすると
$$a_{n+2}=a_n+a_{n+1}=4(q_n+q_{n+1})+(r_n+r_{n+1})$$

ゆえに、 a_{n+2} を 4 で割った余り r_{n+2} は、 r_n+r_{n+1} を 4 で割った余りに等しい。

数列 $\{a_n\}$ の各項を 4 で割ったときの余りを調べると
$$r_1=1, r_2=1$$
$$r_1+r_2=1+1=4\cdot 0+2 \text{ から } r_3=2$$
$$r_2+r_3=1+2=4\cdot 0+3 \text{ から } r_4=3$$
$$r_3+r_4=2+3=4\cdot 1+1 \text{ から } r_5=1$$
$$r_4+r_5=3+1=4\cdot 0 \text{ から } r_6=0$$

同様に調べて、順に並べた数列を $\{r_n\}$ を書き出すと
 $\{r_n\}: 1, 1, 2, 3, 1, 0, 1, 1, 2, 3, 1, 0, \cdots$
ゆえに、数列 $\{r_n\}$ について、 $r_n=r_{n+6}$ である。

$i^{a_n}=i^{4q_n+r_n}=(i^4)^{q_n}\cdot i^{r_n}=1^{q_n}\cdot i^{r_n}=i^{r_n}$ であり、 $2019=6\cdot 336+3$ であるから、求める

和は
$$\sum_{n=1}^{2019} i^{a_n}=\sum_{n=1}^{6\cdot 336} i^{r_n}+i^1+i^1+i^2=(i^1+i^1+i^2+i^3+i^1+i^0)\cdot 336+i+i-1$$
$$=(i+i-1-i+i+1)\cdot 336+2i-1$$
$$=2i\cdot 336+2i-1=-1+674i$$

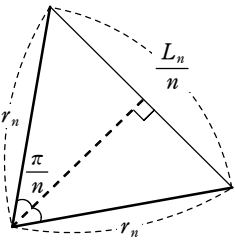
3

n は 3 以上の自然数とする。面積 1 の正 n 角形 P_n を考え、その周の長さを L_n とする。

- (1) $(L_n)^2$ を求めよ。 (2) $\lim_{n\rightarrow\infty} L_n$ を求めよ。
(3) $n<k$ ならば $(L_n)^2>(L_k)^2$ となることを示せ。

- (1) 正 n 角形 P_n の外接円の半径を r_n とおく。

P_n を頂角が $\frac{2\pi}{n}$ 、等しい辺の長さが r_n の n 個の合同な二等辺三角形に分割すると、その面積について
$$\frac{1}{2}r_n^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{n}$$
$$n\geq 3 \text{ より } \sin\frac{2\pi}{n}>0 \text{ であるから } r_n^2=\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}$$



P_n の 1 辺の長さは $\frac{L_n}{n}$ であるから $\frac{L_n}{n}=2r_n\sin\frac{\pi}{n}$

よって $L_n=2nr_n\sin\frac{\pi}{n}$
ゆえに $(L_n)^2=4n^2\cdot\frac{2}{n\sin\frac{2\pi}{n}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}=4n\cdot\frac{1}{\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}\cdot\sin^2\frac{\pi}{n}=4n\tan\frac{\pi}{n}$

- (2) $\theta=\frac{\pi}{n}$ とおくと $n=\frac{\pi}{\theta}$
 $n\rightarrow\infty$ のとき $\theta\rightarrow+0$ であるから

$$\lim_{n\rightarrow\infty}(L_n)^2=\lim_{\theta\rightarrow+0}\frac{4\pi}{\theta}\tan\theta=\lim_{\theta\rightarrow+0}\left(4\pi\cdot\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta}\right)=4\pi$$
$$L_n>0 \text{ であるから } \lim_{n\rightarrow\infty} L_n=2\sqrt{\pi}$$

- (3) $(L_n)^2=4\pi\cdot\frac{\tan\theta}{\theta} \quad n\geq 3 \text{ であるから } 0<\theta\leq\frac{\pi}{3}$

$f(x)=\frac{\tan x}{x}$ とおくと $f'(x)=\frac{\frac{x}{\cos^2 x}-\tan x}{x^2}=\frac{x-\sin x\cos x}{x^2\cos^2 x}$
 $g(x)=x-\sin x\cos x$ とおくと $g'(x)=1-\cos^2 x+\sin^2 x=2\sin^2 x$
 $0< x\leq\frac{\pi}{3}$ のとき $g'(x)>0$ であり、 $g(0)=0$ であるから、 $0< x\leq\frac{\pi}{3}$ のとき
$$g(x)>0$$

よって、 $0< x\leq\frac{\pi}{3}$ のとき $f'(x)>0$ であるから、 $f(x)$ は $0< x\leq\frac{\pi}{3}$ の範囲で単調に増加する。

$n<k$ のとき $\frac{\pi}{n}>\frac{\pi}{k}$ であるから $f\left(\frac{\pi}{n}\right)>f\left(\frac{\pi}{k}\right)$

したがって $(L_n)^2>(L_k)^2$

4

実数 x に対し $[x]$ を $x-1<[x]\leq x$ を満たす整数とする。次の極限を求めよ。

- (1) $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]$
(2) $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}(1+[\sqrt{2}]+[\sqrt{3}]+\cdots+[\sqrt{n}])$

- (1) 実数 x に対して $x-1<[x]\leq x$ であるから

$$\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}-1<\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]\leq\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}$$
$$n \text{ が十分大きいとき、 } \frac{1}{n}>0 \text{ であるから } \frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}<\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]\leq\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}$$
$$\frac{1}{n}=\theta \text{ とおくと、 } n\rightarrow\infty \text{ のとき } \theta\rightarrow+0 \text{ であるから}$$

$$\lim_{n\rightarrow\infty}n\sin\frac{1}{n}=\lim_{\theta\rightarrow+0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$$

よって、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\left(\frac{1}{n\sin\frac{1}{n}}-\frac{1}{n}\right)=1$ であるから、はさみうちの原理により
$$\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\left[\frac{1}{\sin\frac{1}{n}}\right]=1$$

- (2) $1+[\sqrt{2}]+\cdots+[\sqrt{n}]=\sum_{k=1}^n[\sqrt{k}]$

自然数 k に対して $\sqrt{k}-1<[\sqrt{k}]\leq\sqrt{k}$ が成り立つから、各辺において、
 $k=1, 2, \cdots, n$ としたものの和をとると $\sum_{k=1}^n(\sqrt{k}-1)<\sum_{k=1}^n[\sqrt{k}]\leq\sum_{k=1}^n\sqrt{k}$
各辺を $n\sqrt{n}$ で割ると $\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n(\sqrt{k}-1)<\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n[\sqrt{k}]\leq\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n\sqrt{k}$
すなわち $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{1}{n\sqrt{n}}\sum_{k=1}^n[\sqrt{k}]\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}$
ここで、 $\lim_{n\rightarrow\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\sqrt{\frac{k}{n}}=\int_0^1\sqrt{x} \, dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}$ であるから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sqrt{\frac{k}{n}} - \frac{1}{\sqrt{n}} \right) = \frac{2}{3}$$

よって、はさみうちの原理により $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n [\sqrt{k}] = \frac{2}{3}$

5

空間内の点 P は、長さ 1 の線分 AB 上と、 $\angle APB \geq \frac{\pi}{6}$ となる領域を動くものとする。

(1) $\angle APB = \frac{\pi}{6}$ のとき、 $\triangle ABP$ の外接円の直径は $\sqrt{\quad}$ である。

(2) 点 P が動きうる領域の体積は $\frac{1}{\pi} \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \pi^2$ である。

(1) $\triangle ABP$ の外接円の半径を R とすると、正弦定理に

$$\text{より } 2R = \frac{AB}{\sin \angle APB} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{6}} = 2$$

よって、 $\triangle ABP$ の外接円の直径は $\sqrt{2}$

(2) xy 平面上において、 $A\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$ とする。

xy 平面上の点 P が $\angle ABP = \frac{\pi}{6}$ を満たすとき、(1) より、

$\triangle ABP$ の外接円の半径は 1 である。

よって、点 P が $y \geq 0$ の範囲を動くとき、 $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

は $\triangle ABP$ の外接円の中心となる。

したがって、 $y \geq 0$ の範囲で $\angle ABP \geq \frac{\pi}{6}$ を満たす点

P が動きうる領域は、右の図の斜線部分となる。

よって、求める体積は、右の図の斜線部分を x 軸の周りに 1 回転させてできる回転体の体積に等しい。

中心 $C\left(0, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 、半径 1 の円の方程式は

$$x^2 + \left(y - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{\sqrt{3}}{2} \pm \sqrt{1 - x^2}$$

したがって、求める体積を V とすると、対称性から

$$\begin{aligned} V &= 2 \left\{ \pi \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{1 - x^2} \right) dx - \pi \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \sqrt{1 - x^2} \right) dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^1 \left(\frac{7}{4} - x^2 + \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - x^2} \right) dx - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{7}{4} - x^2 - \sqrt{3} \cdot \sqrt{1 - x^2} \right) dx \right\} \\ &= 2\pi \left\{ \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{7}{4} - x^2 \right) dx + \sqrt{3} \int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx + \sqrt{3} \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx \right\} \end{aligned}$$

$$\text{ここで } \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{7}{4} - x^2 \right) dx = \left[\frac{7}{4}x - \frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{5}{6}$$

$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は半径 1 の四分円の面積を表すから

$$\int_0^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

$\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx$ は、右の図の斜線部分の面積を表す。

$$\text{よって } \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{1 - x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{したがって } V = 2\pi \left\{ \frac{5}{6} + \sqrt{3} \cdot \frac{\pi}{4} + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8} \right) \right\} = \frac{11\pi + 10\sqrt{3}\pi^2}{12}$$

6

実数を係数とする 3 次式 $f(x)$ は $f(1+i) = 4+3i$ かつ $f(1+2i) = 4$ を満たすとする。このとき、 $f(x)$ を求めよ。

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とする。ただし、 a, b, c, d は実数とし、 $a \neq 0$ とする。このとき

$$\begin{aligned} f(1+i) &= a(1+i)^3 + b(1+i)^2 + c(1+i) + d = a(1+3i-3-i) + 2bi + c + ci + d \\ &= -2a + c + d + (2a+2b+ci)i \end{aligned}$$

$f(1+i) = 4+3i$ であるから $-2a + c + d + (2a+2b+c)i = 4+3i$

a, b, c, d は実数であるから、 $-2a + c + d, 2a+2b+c$ も実数で

$$-2a + c + d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$2a + 2b + c = 3 \quad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また

$$\begin{aligned} f(1+2i) &= a(1+2i)^3 + b(1+2i)^2 + c(1+2i) + d \\ &= a(1+6i-12-8i) + b(-3+4i) + c + 2ci + d \\ &= -11a - 3b + c + d + (-2a+4b+2c)i \end{aligned}$$

$$f(1+2i) = 4 \text{ であるから } -11a - 3b + c + d + (-2a+4b+2c)i = 4$$

a, b, c, d は実数であるから、 $-11a - 3b + c + d, -2a+4b+2c$ も実数で

$$-11a - 3b + c + d = 4 \quad \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$-2a + 4b + 2c = 0 \quad \cdots \cdots \textcircled{4}$$

①-③ から $9a+3b=0$ よって $b=-3a$

このとき、② から $-4a+c=3$ ゆえに $c=4a+3$

よって、④ から $-6a+6=0$ ゆえに $a=1$

よって $b=-3, c=7$

① から $5+d=4$ ゆえに $d=-1$

したがって $f(x) = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

別解 $f(1+2i) = 4$ から、 $x = 1+2i$ は 3 次方程式 $f(x) - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ の解である。

① の係数は実数であるから、 $x = 1-2i$ も ① の解である。

ここで $(x-1-2i)(x-1+2i) = \{(x-1)^2 + 4\}$

よって、実数 $a (a \neq 0), b$ に対して

$$f(x) - 4 = \{(x-1)^2 + 4\}(ax+b)$$

と表すことができる。

ゆえに $f(x) = \{(x-1)^2 + 4\}(ax+b) + 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$

よって $f(1+i) = 3\{(1+i)a+b\} + 4 = 3a+3b+4+3ai$

$f(1+i) = 4+3i$ であるから $3a+3b+4+3ai = 4+3i$

a, b は実数であるから、 $3a+3b+4, 3a$ も実数で $3a+3b+4=4, 3a=3$

ゆえに $a=1, b=-1$

このとき、② から $f(x) = (x^2 - 2x + 5)(x-1) + 4 = x^3 - 3x^2 + 7x - 1$

7

6 個の異なる商品が 6 つの引き出しに 1 個ずつ入っている。一度すべての引き出しから商品を取り出し、無作為に 1 個ずつ引き出しに戻したとき、もとの引き出しに戻る商品

の個数が 3 となる確率は $\frac{1}{6}$ である。ただし、1 つの引き出しには 1 個の商品しか

入らないものとする。

商品の戻し方の総数は $6! = 720$ (通り)

6 つの商品のうち、もとの引き出しに戻る 3 つの商品の選び方は ${}_6C_3 = 20$ (通り)

また、残りの 3 つの商品が 3 つとももとの引き出しに戻らない戻し方は 2 通り

$$\text{したがって、求める確率は } \frac{20 \times 2}{720} = \frac{1}{18}$$

8

a と p を正の実数とする。座標平面上に原点 $O(0, 0)$ を通る放物線 $y = ax^2$ と点 $P(0, p)$ がある。点 A がこの放物線上を動くとき、線分 AP の長さは $A=O$ において最小値をとるとする。 p を固定したとき、この条件を満たすような a の最大値を p を用いて表せ。

A の x 座標が t のときの線分 AP の長さの 2 乗を $f(t)$ とおくと

$$\begin{aligned} f(t) &= t^2 + (at^2 - p)^2 \\ &= a^2 t^4 - (2ap - 1)t^2 + p^2 \\ &= a^2 \left(t^2 - \frac{2ap - 1}{2a^2} \right)^2 + p^2 - \frac{(2ap - 1)^2}{4a^2} \end{aligned}$$

ここで、 t^2 は $t^2 \geq 0$ の範囲を動く。

また、 $a > 0$ から $a^2 > 0$ である。

[1] $\frac{2ap-1}{2a^2} \leq 0$ すなわち $a \leq \frac{1}{2p}$ のとき

$f(t)$ は $t^2 = 0$ すなわち $A=O$ のとき最小となり、このとき線分 AP の長さも最小となる。

[2] $\frac{2ap-1}{2a^2} > 0$ すなわち $a > \frac{1}{2p}$ のとき

$f(t)$ は $t^2 = \frac{2ap-1}{2a^2} (>0)$ のとき最小となり、このとき線分 AP の長さも最小となる。

すなわち、 $A=O$ のとき線分 AP の長さは最小にならない。

[1], [2] から、与えられた条件を満たす a の最大値は $\frac{1}{2p}$

9

等差数列 $\{a_n\}$ の初項が 99 で、第 12 項から第 23 項までの和が 0 である。このとき、初項から第 $\square$ 項までの和が最大となる。

等差数列 $\{a_n\}$ の公差を d とすると $a_n = 99 + (n-1)d$

このとき $a_{12} = 99 + 11d, a_{23} = 99 + 22d$

第 12 項から第 23 項までの和が 0 であるから $\frac{1}{2} \cdot 12 \{(99 + 11d) + (99 + 22d)\} = 0$

整理すると $33d + 198 = 0$ ゆえに $d = -6$

よって、一般項は $a_n = 99 - 6(n-1) = -6n + 105$

$a_n \geq 0$ となるのは、 $-6n + 105 \geq 0$ から $n \leq \frac{35}{2}$

したがって、初項から第 17 項までは正の数であり、第 18 項からは負の数であるから、初項から第 17 項までの和が最大となる。

10

座標平面上に、 $y = x\sqrt{x}$ ($x \geq 0$) で表される曲線 C_1 、および $y = x^2$ ($x \geq 0$) で表される曲線 C_2 がある。点 (1, 1) における曲線 C_1 の接線を L_1 とする。以下の計算では、必要ならば $\sqrt{5} = 2.236\dots$ 、 $\sqrt{13} = 3.605\dots$ を用いてもよい。

- 接線 L_1 と曲線 C_2 の 2 つの交点を結ぶ線分の長さを求めよ。
- 曲線 C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを求めよ。
- 曲線 C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さは、曲線 C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さより大きいことを証明せよ。

- $f(x) = x\sqrt{x}$ とする。

$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ であるから、点 (1, 1) における曲線 C_1 の接線 L_1 の方程式は

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 1) \qquad \text{すなわち} \qquad y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

よって、曲線 C_2 と直線 L_1 の交点の x 座標は

$$x^2 = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \qquad \text{すなわち} \qquad x = \frac{1}{2}, 1 \qquad \text{これらは } x \geq 0 \text{ を満たす。}$$

したがって、曲線 C_2 と直線 L_1 の交点の座標は $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right), (1, 1)$

よって、2 つの交点を結ぶ線分の長さは $\sqrt{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{4}$

- $f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ であるから、求める曲線の長さは

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)^2} dx &= \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \left[\frac{8}{27} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 \\ &= \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \end{aligned}$$

- 曲線 C_1 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを T_1 、曲線 C_2 の $0 \leq x \leq 1$ の部分の長さを T_2 とし、A (1, 1),

B $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$ とする。

このとき、(2) から $T_1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right)$

また $OB + BA < T_2$ …… ①

$OB = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{4}$ であるから

$$OB + BA = \frac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{13})$$

$$\begin{aligned} \text{ここで} \quad (OB + BA) - T_1 &= \frac{1}{4}(\sqrt{5} + \sqrt{13}) - \frac{8}{27} \left(\frac{13\sqrt{13}}{8} - 1 \right) \\ &= \frac{27\sqrt{5} - 25\sqrt{13} + 32}{108} > \frac{27 \times 2.23 - 25 \times 3.61 + 32}{108} \\ &= \frac{1.96}{108} > 0 \end{aligned}$$

よって $T_1 < OB + BA$ …… ② ①, ② より $T_1 < T_2$

