

今回は、簡単そうで意外と躓(つまづ)いてしまう三角関数の不定積分について学びます。

【例題】 次の計算をなさい。

$$\textcircled{1} \int \frac{dx}{\cos x} \qquad \textcircled{2} \int \frac{dx}{\sin x} \qquad \textcircled{3} \int \frac{dx}{\tan x}$$

① **解答**  $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx$     ここで  $\int f(\sin x) \cos x dx$     つまり  $\sin x$  の関数に  $\cos x$

がかけてある関数の積分は、 $\sin x = t$  とおいて置換するという原則を利用します。

$\sin x = t$  とおいて、両辺を  $t$  で微分すると、 $\cos x \frac{dx}{dt} = 1$  より  $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\cos x}$

このとき 与式  $= \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - t^2} \cdot \frac{1}{\cos x} dt = \int \frac{dt}{1 - t^2} = - \int \frac{dt}{t^2 - 1} = - \int \frac{dt}{(t-1)(t+1)}$

$$= - \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt = - \frac{1}{2} (\log |t-1| - \log |t+1|) + C$$

$$= - \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C = \log \sqrt{\left| \frac{t+1}{t-1} \right|} + C = \log \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

**注意**  $\log \sqrt{\left| \frac{t+1}{t-1} \right|} + C = \log \sqrt{\frac{1 + \sin x}{1 - \sin x}} + C$  となるところで、絶対値記号が外れているのは、 $1 - \sin x$  も

$1 + \sin x$  も0でなければ必ず正となるからです。

② **解答**  $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x}{\sin^2 x} dx = \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} dx$     ここでも①と同様に  $\int f(\cos x) \sin x dx$     つまり  $\cos x$  の関

数に  $\sin x$  がかけてある関数の積分の定石通りに、 $\cos x = t$  とおいて置換するという原則に従います。

$\cos x = t$  とおいて、両辺を  $t$  で微分すると、 $-\sin x \frac{dx}{dt} = 1$  より  $\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{\sin x}$

このとき 与式  $= \int \frac{\sin x}{1 - \cos^2 x} \left( -\frac{1}{\sin x} \right) dt = \int \frac{dt}{t^2 - 1} = \int \frac{1}{2} \left( \frac{1}{t-1} - \frac{1}{t+1} \right) dt$

$$= \frac{1}{2} (\log |t-1| - \log |t+1|) + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{t-1}{t+1} \right| + C$$

$$= \log \sqrt{\left| \frac{t-1}{t+1} \right|} + C = \log \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

**注意**  $\log \sqrt{\left| \frac{t-1}{t+1} \right|} + C = \log \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} + C$  のところで絶対値記号が外れている理由も、①と同様です。

③ **解答**  $\int \frac{dx}{\tan x} = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{(\sin x)'}{\sin x} dx = \log |\sin x| + C \quad (C \text{ は積分定数})$

**注意**  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \log |f(x)| + C$  ( $C$  は積分定数) の公式は必須の知識です。しっかり頭に入れて下さい。